

Některé jiné typy ODR 1.řádu.

Bernoulliiova rovnice $y' + a(x)y = y^r b(x)$, $r \neq 0, 1$

Tato rovnice se převádí na lineární rovnici substitucí nové závislé proměnné $z = y^{1-r}$. Bernoulliiova rovnice má stacionární řešení $y = 0$ a můžeme dále předpokládat $y \neq 0$ a tedy i $z \neq 0$. Pro obecné r je nutné předpokládat $y > 0$, V případech racionálního čísla r lze přibrat i interval $(-\infty, 0)$ (pak se musí dávat pozor na znaménka). My dále předpokládáme $y > 0$ a tedy i $z > 0$.

$$y = z^{1/(1-r)} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-r} z^{r/(1-r)} z' \Rightarrow \frac{1}{1-r} z^{r/(1-r)} z' + a z^{1/(1-r)} = z^{r/(1-r)} b \Rightarrow \frac{z'}{1-r} + a z = b$$

a dostáváme hledanou lineární rovnici. Tu vyřešíme a dáme zpět y za z . Viz příklad na cvičení.

Exaktní rovnice

Máme ODR tvaru $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$. Chceme najít řešení tvaru $f(x, y) = C$ a hledáme pro tento tvar podmínky. Předpokládejme, že $f(x, y(x)) = C$ je řešení naší rovnice, takže derivace rovnosti podle x dá naši rovnici; dále předpokládáme, že můžeme přehodit pořadí u druhých partiálních derivací:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = g + h y' \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = g, \frac{\partial f}{\partial y} = h \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Dostali jsme nutnou podmínku pro náš předpoklad. Rovnice $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$ splňující rovnost $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ se nazývají *exaktní*. Uvedená podmínka je i postačující pro nalezení řešení tvaru $f(x, y) = C$ (k tomu je třeba znát derivaci integrálu podle parametru).

Postup je následující. Pohlížíme na f jako na funkci dvou proměnných x, y a víme, že $\frac{\partial f}{\partial x} = g$, takže $f(x, y) = \int g(x, y) dx$, což je nějaká funkce $G(x, y) + C(y)$ (v konstantě se může objevit parametr y). Dále víme, že $\frac{\partial f}{\partial y} = h$ a tedy $h = \frac{\partial G}{\partial y} + C'(y)$. Pokud jsme počítali správně, v poslední rovnici lze zkrátit všechna x , vypočteme C' , potom C a dosadíme do rovnosti $f(x, y) = G(x, y) + C$. Jsme hotovi (viz příklad na cvičení).

Funkce f se pak nazývá *potenciál* vektorového pole (g, h) a toto pole se nazývá *potenciální* (je to gradient potenciálu, $\nabla f = (g, h)$).