

Některé jiné typy ODR 2.řádu.

Eulerova rovnice $x^2 y'' + xpy' + qy = b(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$

Tato rovnice se převádí na lineární rovnici substitucí nové nezávisle proměnné $t = \log |x|$. Označíme $z(t) = y(e^t)$ pro $x > 0$ a $z(t) = y(-e^t)$ pro $x < 0$. Dále budeme uvažovat $x > 0$. Pak

$$z' = y'x, \quad z'' = y''x^2 + y'x \Rightarrow \text{původní rovnice se převede na } z'' + (p-1)z' + qz = b(e^t)$$

Máme dále dvě možnosti. Buď vyřešíme novou rovnici i s pravou stranou a pak do výsledku dosadíme $t = \log x$ nebo vyřešíme jen homogenní část nové rovnice, do tohoto řešení dosadíme $t = \log x$, dostaneme řešení homogenní části původní rovnice a dořešíme ji variací konstant.

Další řešitelné ODR 2.řádu

Z ODR 2.řádu probíráte jen obecnou teorii lineárních rovnic a řešíte jen lineární rovnice s konstantními koeficienty. Jsou však další ODR 2.řádu, které jsou jednoduché a snadno se řeší. Uvedeme některé, u kterých chybí ve vyjádření $y'' = f(x, y, y')$ některá proměnná ve funkci f .

$y'' = f(x)$, dvojí integrací dostaneme

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

$y'' = f(y)$, po vynásobení y' a integraci vzhledem k y dostaneme rovnici 1.º:

$$y''y' = f(y)y' \Rightarrow y''y' dx = f(y) dy \Rightarrow y'^2/2 = \int f(y) dy.$$

$y'' = f(y')$, substitucí $z = y'$ dostaneme rovnici 1.řádu $z' = f(z)$, její řešení $z = \int f(z) dz = F(z) + C$ a tedy rovnici $y' = F(y') + C$ 1.řádu pro původní proměnné.

$y'' = f(x, y')$, substitucí $z = y'$ převedeme rovnici 2.řádu. na dvě rovnice 1.řádu

$$z' = f(x, z), \quad y' = z.$$

$y'' = f(y, y')$, položením $y' = p(y)$ dostáváme $y'' = \frac{dp}{dy} y' = p'p$ a tedy opět dvě rovnice 1.řádu

$$p'p = f(y, p), \quad y' = p.$$

Obecně platí, že jakmile chybí v rovnici y , lze substitucí $z = y'$ snížit řád rovnice. V lineárních rovnicích lze snížit řád rovnice i v případě, známe-li jedno řešení y_1 . Potom substitucí $z = y_1 y$ také snížíme řád rovnice.