

Soustavy kineárních ODR 1.řádu

Jsou tři základní postupy řešení uvedených soustav s konstantními koeficienty: převodem na lineární ODR vyššího řádu s konstantními koeficienty jedné neznámé funkce, pomocí vlastních čísel matice a pomocí λ -matic (tento poslední postup byl uveden na přednášce a nebudeme ho dále uvádět). Uvedené metody ukážeme na dvou rovnicích, v řešení cvičení jsou i příklady více rovnic. Mějme následující soustavu pro dvě rovnice s neznámými $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + q(t) \\ y' &= cx + dy + r(t)\end{aligned}$$

Převod na rovnici s jednou neznámou

Předpokládejme $c \neq 0$ (jinak vypočteme z druhé rovnice y a dosadíme do první). Zderivujeme druhou rovnici a za x' dosadíme výraz z první rovnice, pak vypočteme x z druhé rovnice a dosadíme do výrazu pro y'' :

$$y'' = cx' + dy' + r'(t) = c(ax + by + q(t)) + dy' + r'(t) = a(y' - dy - r(t)) + c(by + q(t)) + dy' + r'(t)$$

Dostali jsme lineární rovnici 2.řádu pro y s konstantními koeficienty. Tu vyřešíme a buď dosadíme do první rovnice nebo do druhé. Ve druhém případě nemusíme řešit diferenciální rovnici s x' , dostaneme přímo x .

Pro tři a více rovnic je postup o něco složitější, viz Řešení.

Postup pomocí vlastních čísel matice

Vypočteme vlastbní čísla matice $A = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, tj. kořeny polynomu pro λ vzniklé položením rovným 0 determinantu matice $\lambda I - A = 0$. Získaný polynom pro λ je stejný jako charakteristický polynom rovnice pro y'' z předchozího postupu.

Pro každé získané vlastní číslo λ najdeme maximální počet n_λ lineárně nezávislých příslušných vlastních vektorů u , tj. řešení rovnice $\lambda u - Au = 0$ (tedy n_λ je dimenze jádra zobrazení $\lambda I - A$, nazývané geometrickou násobností nebo dimenzí vlastního čísla λ). Pokud se všechna čísla n_λ rovnají (algebraické) násobnosti kořene λ charakteristického polynomu, jsme hotovi, získali jsme všechna řešení dané soustavy rovnic. Pokud je některá geometrická násobnost menší než algebraická, je nutné použít speciální postup pro získání zbylých řešení (to je jednoduché pro soustavu dvou rovnic, složitější pro více rovnic). Nebudeme ho zde uvádět, protože výpočet řešení pomocí výše uvedeného převodu nebo pomocí λ -matic bývá v tomto případě jednodušší.

Pro soustavu dvou lineárních rovnic bývá nejjednodušší převod na rovnici druhého řádu nebo použití λ -matic. Ale i použití vlastních čísel je jednoduché. U soustav alespoň tří rovnic bývá jednodušší použití λ -matic, protože vždy vede přímo k cíli. Zbylé dva postupy jsou jednoduché, pokud nenastanou speciální okolnosti (např. nerovnost násobností u vlastních čísel), což se nemusí dopředu poznat.