

Implicitní funkce

Větu o implicitních funkcích lze dokazovat pomocí jiných postupů, které dávají výsledky v obecnějších situacích (např. pro zobrazení v Banachových prostorech). Tato zobecnění nebudeme uvádět, podíváme se na jiné postupy pro nejjednodušší případ $f(x, y) = 0$. Budeme předpokládat, že f má spojité parciální derivace v okolí G bodu (x_0, y_0) , platí $f(x_0, y_0) = 0$ a $f_y(x, y) \neq 0$ na G (indexy x, y u f značí parciální derivace funkce f podle x , resp. y).

1. Když formálně zderivujeme rovnost $f(x, y) = 0$ podle x (chápeme y jako funkci proměnné x), dostaneme rovnost $f_x + f_y y' = 0$, což je exaktní diferenciální rovnice 1. řádu, pokud $f_{xy} = f_{yx}$ (viz Poznámky ke cvičení z 13.10.). Ta má podle Peanovy věty řešení $y(x)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$. Jestliže existují spojité parciální derivace 2. řádu funkce f podle z , je uvedené řešení jediné. Rovnice má obecné řešení tvaru $F(x, y(x)) = C$. Pro naši počáteční podmínku je $C = 0$. Funkce $y(x)$ má spojitou první derivaci na okolí x_0 a dosazením $y(x)$ do $f(y, y(x))$ vidíme, že $F = f$. Získali jsme existenci jediné funkce y , která na okolí (x_0, y_0) splňuje $f(x, y(x)) = 0$ a její derivace rovnost $f_x + f_y y' = 0$.

2. Větu o implicitních funkcích lze dokázat pomocí tzv. *Banachovy věty o pevném bodě*, která se bude probírat koncem semestru. Uvedeme její obecné znění, i když je použijeme jen pro reálné funkce.

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a $f : X \rightarrow X$ je lipschitzovská funkce s konstantou menší než 1. Pak existuje jediný bod $x_0 \in X$, že $f(x_0) = x_0$.

Uvedený bod se nazývá pevným bodem zobrazení f , Podmínka úplnosti metrického prostoru znamená, že každá cauchyovská posloupnost v tomto prostoru konverguje. Podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky je $\mathbb{R}$ úplný prostor (taltěž pro euklidovské prostory). Uvedená lipschitzovská podmínka znamená, že existuje $k < 1$, že pro každé $x, y \in X$ je $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$. Pro použití stačí uvažovat, že f je definované na uzavřené podmnožině $Y \subset X$ a pro každé $y \in Y$ je $d(y, f(y)) < 1$.

Mějme funkci $f(x, y)$ splňující podmínky z 1. odstavce. Vezmeme funkci

$$g(x, y) = y - \frac{f(x, y)}{f_y(x_0, y_0)}, \quad (x, y) \in V \Rightarrow g_y(x_0, y_0) = 0.$$

Existuje uzavřená koule $W = B_r(x_0, y_0) \subset G, r < 1/2$, na které je $|g_y(x, y)| \leq k < 1$. Protože f je spojitá v (x_0, y_0) , existuje uzavřená koule $B_s(x_0, y_0) = K \subset W$, že $g(K) \subset W$ (takže $|(x, y) - g(x, y)| < 1$ pro $(x, y) \in K$). Pro každé x, y_1, y_2 s vlastností $(x, y_1), (x, y_2) \in K$ je

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \quad (\text{z věty o střední hodnotě}).$$

Podle výše uvedené Banachovy věty (resp. její upravené verze) existuje pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ jediný bod y_x , že $g(x, y_x) = y_x$, což znamená $f(x, y_x) = 0$. Potom funkce $y = \{x \rightsquigarrow y_x; |x - x_0| < \delta\}$ je hledaná jediná funkce s vlastností $f(x, y(x)) = 0$.

Pro existenci a spojitost derivace y' je nutné použít podrobnějšího postupu.

Výše uvedené použití Banachovy věty o pevném bodě lze použít pro obecnější případ funkce $f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde se místo f_y vezme příslušný jacobíán. Ještě obecněji lze tento postup použít pro zobrazení mezi Banachovými prostory.