

Tečné roviny a normály ke grafům implicitně daných funkcí (budeme dále předpokládat, že použité derivace existují.)

Pro dvě proměnné

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě (x_0, y_0) , $y_0 = f(x_0)$, je dána funkcí $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Je-li funkce f dána implicitně pomocí $F(x, y) = 0$, dosadíme do vzorce pro tečnu rovnost pro derivaci $f'(x_0) = -F_x(x_0, y_0)/F_y(x_0, y_0)$. Po úpravě dostaneme vzorec pro tečnu, z které vyplývá, že $\text{grad } F$ je směr normály ke grafu funkce f :

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \quad \text{tj. } \text{grad } F(x_0, y_0) \cdot (X - X_0) = 0,$$

kde $X - X_0$ je vektor $(x - x_0, y - y_0)$.

Pro tři proměnné

Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$, je dána funkcí $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Je-li funkce f dána implicitně pomocí $F(x, y, z) = 0$, dosadíme do vzorce pro tečnu rovnosti $f_x(x_0, y_0) = -F_x(x_0, y_0, z_0)/F_z(x_0, y_0, z_0)$. Po úpravě dostaneme vzorec pro tečnu, z které vyplývá, že $\text{grad } F$ je směr normály ke grafu funkce f :

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad \text{tj. } \text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \cdot (X - X_0) = 0,$$

kde $X - X_0$ je vektor $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

Tečna ke křivce dané parametricky

Nechť C je křivka daná parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ a potřebujeme výraz pro tečnu k C v bodě (x_0, y_0) , kde $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $t_0 \in J$. Pak příslušná tečna je dána vztahem

$$y - y_0 = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - x_0), \quad \text{nebo } x = x_0 + \varphi'(t_0) \cdot u, y - y_0 = \psi'(t_0) \cdot u, u \in \mathbb{R} \text{ je parametr}$$

Je zřejmé, jak získáme parametrický popis tečny ke křivce v $\mathbb{R}^3$.

Extrémy funkcí více proměnných na otevřené množině.

Funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, G otevřená v $\mathbb{R}^n$, má lokální extrémy jen v bodech, kde buď $\text{grad } f = 0$ nebo některá z parciálních derivací neexistuje. Tyto body se mohou nazývat *kritické body*. Globální extrémy mohou být jen v bodech, kde jsou lokální extrémy. Může se však stát, že $\sup_G f$ nebo $\inf_G f$ jsou vlastní hodnoty, ale nabývají se na hranici množiny G nebo v ∞ . Nestačí tedy najít největší nebo nejmenší hodnotu funkce v bodech lokálních extrémů.

Mějme kritický bod p funkce f na G a předpokládejme, že f má v okolí bodu p spojitě parciální derivace 2. řádu (pokud tato podmínka není splněna nebo neexistuje $\text{grad } f(p)$, nezbyváá než zkoumat hodnoty f v okolí bodu p , což většinou bývá obtížné). Postačující podmínky pro existenci lokálního extrému pak dávají odpověď na základě definitnosti kvadratické formy $K(h) = \sum f_{x_i x_j} h_i h_j$ (resp. matice této formy, což je Hessova matice funkce f). Může nastat jakýkoli případ, pokud je uvedená forma semidefinitní. Není pravda, že je-li forma pozitivně semidefinitní, nabývá f v daném bodě neostře lokální minimum. Pro zjištění definitnosti máme zhruba tři možnosti.

1. *Úprava $K(h)$ na součet čtverců.*

To je jednoduchý postup zvláště pro dvě proměnné, někdy i pro tři proměnné. Je to ekvivalentní úpravě Hessovy matice na diagonální tvar.

2. *Sylvestrovo kritérium.*

Sylvestrovo kritérium charakterizuje některé definitnosti pro symmetrické matice $M = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ (tedy i pro Hessovu matici) následovně:

Matice M je pozitivně definitní právě když hlavní minory (subdeterminanty) $\det M_k = |a_{ij}|_{i,j \leq k}$ jsou kladné.

Matice M je negativně definitní právě když všechny hlavní minory (subdeterminanty) $\det M_k = |a_{ij}|_{i,j \leq k}$ mají znaménka $(-1)^k$.

Lze dodat i charakterizaci indefinitní matice (tu Sylvester neuvedl):

Matice M je indefinitní právě když nastane jeden z následujících dvou případů:

1. Existuje $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, že k je sudé a $\det(a_{i_j}) < 0$.
2. Existuje $\{i_1, \dots, i_k\}, \{m_1, \dots, m_l\} \subset \{1, \dots, n\}$, že k, l jsou lichá a $\det(a_{i_j}) < 0, \det(a_{m_j}) > 0$

Uvedené kritérium indefinitnosti je složitější a často stačí použít následující postačující vlastnosti.

V každém následujícím případě je symetrická matice M indefinitní:

1. Na diagonále jsou čísla s opačnými znaménky.
2. M není pozitivně ani negativně definitní a všechny hlavní minory jsou nenulové.
3. Existuje sudé k , že $M_k < 0$ nebo existují lichá k, l , že $M_k < 0, M_l > 0$

Dvouřádková symetrické matice je indefinitní právě když její determinant je záporný. Speciálně pro Hessovu matici platí (v kritickém bodě p):

Jestliže $f_{xx}(p)f_{yy}(p) > f_{xy}^2(p)$, má f v p ostrý lokální extrém (maximum pro $f_{xx}(p) < 0$, minimum pro $f_{xx}(p) > 0$). Je-li $f_{xx}(p)f_{yy}(p) < f_{xy}^2(p)$, je v bodě p sedlo.

3. Vlastní čísla matice.

Jsou-li všechna vlastní čísla matice kladná (resp. záporná), je matice pozitivně (resp. negativně) definitní. Jsou-li všechna vlastní čísla nenulová a různých znamének, je matice indefinitní. Jinak je semidefinitní.