

Extrémy funkcí více proměnných na uzavřených množinách

Uzavřená množina M s neprázdným vnitřkem bývá obvykle sjednocením otevřené množiny a její hranice. V tomto případě lze hledat lokální extrémy uvnitř M a lokální extrémy na hranici vnitřku. Srovnáním hodnot všech těchto extrémů získáme globální extrémy na M . Lokální extrém uvnitř M je samozřejmě i lokální extrém na celé množině M . Ale lokální extrém na hranici nemusí být lokálním extrémem na M (např. v bodě p lokálního maxima na hranici se hodnota ve vnitřních bodech M blízko p může zvětšovat). Pokud je úkolem najít jen globální extrémy, srovnají se hodnoty ve všech kritických bodech a není nutné zkoumat, zda se jedná o lokální extrémy. To zvláště platí, pokud je M omezená. Pak je kompaktní a musí mít globální minimum i maximum v kritických bodech (pokud tedy vyjdou jen dva kritické body, v jednom musí být maximum a ve druhém minimum). Jestliže je M neomezená, je situace složitější, protože funkce může mít supremum (resp. infimum) v "nekonečnu", které není maximum (resp. minimum) a potom globální maximum (resp. minimum) funkce nemá.

Hledání extrémů na hranici množiny M závisí na tom, jak je hranice popsána. Pokud je popsána parametricky nebo je to graf funkce jedné proměnné, můžeme rovnice s parametry nebo funkci dosadit do f . Je-li např. hranice tvaru kružnice, můžeme dosadit $x = x_0 + r \cos t$, $y = y_0 + r \sin t$ do $f(x, y)$ a to na intervalu $[0, 2\pi]$ pro t , nebo lépe např. na $(0, 3\pi)$ (pak nemusíme zkoumat krajní body). Je-li M čtverec, dosazujeme postupně do $f(x, y)$ rovnice pro x, y popisující strany čtverce. Často bývá hranice popsána implicitní funkcí. Někdy lze i v tomto případě rozložit hranici na několik částí, které jsou grafy funkcí a v jednotlivých částech zjistit extrémy (např. u kružnice $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ a dosadit tyto výrazy do $f(x, y)$, – pozor na body dotyku jednotlivých částí). Ve všech uvedených případech převedeme úlohu hledání extrémů funkce n proměnných na hledání extrémů funkce méně proměnných. U funkcí tří proměnných s jednou podmínkou (např. extrémy $f(x, y, z)$ na sféře) tímto způsobem převedeme úlohu na dvě proměnné; pokud máme dvě podmínky (např. extrémy $f(x, y, z)$ na průniku sféry a válcové plochy) dostaneme jednu proměnnou). Vždy je vhodné uvážit, zda lze i u implicitně dané množiny vypočítat některé proměnné pomocí zbývajících a tím snížit počet proměnných. Musí se však dávat pozor na změnu množiny M (u získané funkce se hledají extrémy většinou na jiné množině M').

Pokud implicitní funkci nedovedeme popsat funkcemi méně proměnných, zbývá použití Lagrangeových multiplikátorů. Na konci tohoto textu jsou postupy pro 2 a 3 proměnné. V postupu používáme Lagrangeovu funkci, kde Lagrangeovy multiplikátory jsou proměnné a gradient počítáme i pro proměnné $\lambda, \nu, \dots$. Při tomto použití se nezapomene na použití vazebních podmínek, které se objeví v gradientu této funkce. Toto použití není nutné, je však třeba vazební podmínky do rovnic získaných z gradientu přidat.

Při zkoumání pomocí druhých derivací už se derivace podle parametrů nepoužívají. Napíše se Hessova matice pro Lagrangeovu funkci jen pro derivace podle $x, y, \dots$, nikoli podle $\lambda, \mu, \dots$ (ale tyto parametry se mohou v derivacích podle $x, \dots$ vyskytovat a pak musíme znát jejich hodnoty pro dané kritické body). Pokud je získaná Hessova matice v daném bodě pozitivně nebo negativně definitní, máme vlastnost kritického bodu vyřešenou. Ve zbývajících případech mohou nastat různé možnosti pro extrémy. V tomto případě vypočítáme z lineárních forem vazebních podmínek některé proměnné ($h, k, \dots$) a dosadíme do kvadratické formy uvedené Hessovy matice funkce F . Ze získané kvadratické formy méně proměnných můžeme získat další vlastnosti kritického bodu.

Dodatek: Použití Lagrangeových multiplikátorů

Dvě proměnné

Nechť M je grafem implicitně zadané spojitě funkce $g(x, y) = 0$, funkce $f(x, y)$ je i se svými parciálními derivacemi 1.ř. spojitá na nějaké otevřené množině $U \supset M$. Hledáme lokální extrémy na bodech M , které nepatří do vnitřku M .

Má-li f v bodě $p \in M$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že Lagrangeova funkce $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ má v (p, λ) nulový gradient. Jedině v těchto bodech může mít f lokální extrém. Pokud nepoznáme, zda se jedná o lokální extrém a jaký je, postupujeme podle dalšího odstavce.

Má-li f spojitě parciální derivace 2.ř. v okolí bodu p , sestojíme Hessovu matici funkce F v bodě p (tedy jen podle proměnných x, y) s dosazením příslušné hodnoty λ . Pokud je tato matice pozitivně (negativně) definitní, má f v p lokální minimum (maximum) na množině M . V ostatních případech nelze nic tvrdit. Pak je vhodné v kvadratické formě jednu proměnnou nahradit druhou proměnnou získanou z rovnosti $g_x(p)h + g_y(p)k = 0$ (pokud není $g_x(p) = g_y(p) = 0$). Tím se dostane kvadratická forma jedné proměnné a podle jejího koeficientu lze rozhodnout o extrému (jedině v případě nulového koeficientu nelze rozhodnout).

Tři proměnné a jedna podmínka

Tvrzení je stejné jako pro dvě proměnné, jen se přidává další proměnná z . Rozdíl je jen na konci při zkoumání kvadratické formy funkce F . Ta je tří proměnných h, k, l a po nahrazení jedné proměnné dvěma zbývajících z rovnosti $g_x(p)h + g_y(p)k + g_z(p)l = 0$ dostaneme kvadratickou formu dvou proměnných a z její definitnosti získáme informace o bodě p .

Tři proměnné a dvě podmínky

Tvrzení o dvou proměnných je opět formálně modifikováno. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině M určené rovnicemi $u(x, y, z) = 0, v(x, y, z) = 0$ se hledají kritické body Lagrangeovy funkce $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda u(x, y, z) + \mu v(x, y, z)$.

Pokud nedostaneme rozhodnutí o kritickém bodě $p = (x, y, z)$ a příslušné λ, μ z kvadratické funkce Hessiany matice $H(p)$, můžeme získat další rozhodnutí z definitnosti kvadratické formy H' jedné proměnné, která vznikne dosazením do H dvou proměnných vypočtených z rovnic

$$h \frac{\partial u}{\partial x}(p) + k \frac{\partial u}{\partial y}(p) + l \frac{\partial u}{\partial z}(p) = 0,$$

$$h \frac{\partial v}{\partial x}(p) + k \frac{\partial v}{\partial y}(p) + l \frac{\partial v}{\partial z}(p) = 0.$$

(např. vypočteme k, l jako funkce h a dosadíme do H ; volba závisle proměnných závisí na tom, který subdeterminant (2×2) Jacobiho matice je neprázdný.).