

Cvičení MA3, 15.12.2025

Metrické prostory

Dokažte následující tvrzení pro metrický prostor (X, d) :

1. Prostor X je separabilní, právě když je každá jeho r -sít, pro každé $r > 0$, spočetná.
2. Prostor X je separabilní, právě když lze z každého jeho otevřeného pokrytí vybrat spočetné pokrytí.
3. Je-li X úplný a nemá izolované body, pak má mohutnost aspoň jako $\mathbb{R}$.
4. Prostor $\mathbb{R}$ lze napsat jako sjednocení množiny 1. kategorie a množiny Lebesgueovy míry nula.

Zápočtová písemka.

1. (6 bodů) Ukažte, že rovnice $F(x, y) = 0$, pro následující funkci F , určuje v jistém okolí $U \times V$ bodu $[1, 1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující pro $x \in U$ rovnice $F(x, f(x)) = 0$, $f(1) = 0$. Vypočítejte $f'(1)$.

$$F(x, y) = x^2 e^{1-y} - y^2 e^{x-1}.$$

2. (6 bodů) Nalezněte na $\mathbb{R}^2$ všechny lokální extrémy funkce

$$x^4 + y^4 - (x + y)^2.$$

3. (6 bodů) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$x + y - 1 \quad \text{na množině } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9(x^2 + y^2) = 2x^2 y^2\}.$$

4. (3 body) Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a e je metrika na X ekvivalentní s d , tj. $\lim_n d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_n e(x_n, x) = 0$ pro libovolné $x \in X$ a posloupnost $\{x_n\}$ v X .

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení, tedy dokažte, že platí, nebo najděte protipříklad.

- (a) Je-li $e \geq d$, je prostor (X, e) úplný.
- (b) Je-li $e \leq d$, je prostor (X, e) úplný.