

Cvičení MA3, 10.11.2025

Implicitní funkce

Zjistěte, zda existuje jednoznačné řešení rovnosti $e^z + x^2y + z = 0$ jako funkce $z(x, y)$ v okolí bodu $(1, -1, 0)$. Pokud ano, vypočítejte v tomto bodě druhou derivaci z podle x, y .

V okolí kterých bodů existuje jednoznačné řešení rovností $xu - yv = 0, xv + yv = 1$ jakožto funkce $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Potom v těchto bodech spočítejte druhou derivaci funkce y podle u .

Písemka

1. (6 bodů) Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\sqrt{-y}.$$

2. (6 bodů) Vyřešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y' = y \log x + x^x, \quad y(1) = 2.$$

3. (6 bodů) Vyřešte diferenciální rovnici

$$9y'' + y = 6 \sin(x/3).$$

4. (3 body) Nechť (X, d) je metrický prostor. Funkce $f : (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je lipschitzovská, jestliže existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$, že $|f(x) - f(y)| \leq K d(x, y)$ pro každé $x, y \in X$.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení

- (a) Funkce $\sqrt{x}$ je lipschitzovská na $[0, 1]$.
- (b) Funkce $\sqrt{x}$ je lipschitzovská na $[1, \infty)$.