

Soustavy kineárních ODR 1.řádu s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}x' &= 2x + 2y \\ y' &= x + 3y\end{aligned}$$

1. Převod na rovnici 2. řádu

$$y'' = x' + 3y' = (2x + 2y) + 3y' = 2(y' - 3y) + 2y + 3y' = 5y' - 4y \Rightarrow y = C_1 e^{4t} + C_2 e^t.$$

Dosazením  $y$  do rovnice  $x = y' - 3y$  dostaneme  $x = C_1 e^{4t} - 2C_2 e^t$ . Maticový zápis výsledku:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Vlastní čísla

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

Najdeme vlastní vektory:

$$(\lambda - 2)u_1 - 2u_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 : u_1 = 1, u_2 = 1, \quad \lambda = 1 : u_1 = 1, u_2 = -1/2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

3.  $\lambda$ -matice

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 2 + (\lambda - 3)(\lambda - 2) \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

Dostáváme postupně rovnice  $y'' - 5y' + 4 = 0$ ,  $-x + (y' + 3y) = 0$  a identické řešení jako v postupu 1.

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -4x\end{aligned}$$

V tomto příkladě je nejjednodušší první postup:

$$x'' = y' = -4x \Rightarrow x = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \Rightarrow y = x' = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x' &= -7x + y \\ y' &= -2x - 5y\end{aligned}$$

Nejdříve řešení převodem:

$$x'' = -7x' + y' = -7x' - 2x - 5y = -7x' - 2x - 5(x' + 7x) = -12x' - 37x \Rightarrow x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

Takže  $y = x' + 7x = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t))$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-6t} \left( C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} \right)$$

Nyní pomocí  $\lambda$ -matic:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 7 & -1 \\ 2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\lambda + 14 & -2 \\ 2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 - (\lambda + 5)(\lambda + 7) \\ 2 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 - 12\lambda - 37 \\ 2 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$$

Dostáváme rovnice  $y'' + 12y' + 37y = 0$  s řešením  $y = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$  a  $x = -(y' + 5y)/2$ , tj.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-6t} \left( C_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

Jednodušší postup je pomocí  $\lambda$ -matic. Vynásobíme třetí řádek  $\lambda$  a přičteme k prvnímu, pak odečteme třetí řádek od druhého, pak přičteme druhý řádek k prvnímu):

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & \lambda + 1 & -\lambda - 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda - 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -\lambda - 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Z prvního řádku dostáváme rovnici  $z'' - z' - 2z = 0$  s řešením  $z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$ .

Z druhého řádku máme  $y' + y - z' - z = 0$ , takže  $y' + y = 3C_1 e^{2t}$  s řešením  $y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}$ .

Ze třetího řádku dostáváme  $-x - y + z' = 0$ , což dává řešení  $x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t}$

Dostáváme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$