

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 3.11.2025

Soustavy ODR

$$x' = -x + y + z$$

$$y' = x - y + z$$

$$z' = x + y - z$$

Druhý řádek vynásobíme $\lambda + 1$ a přičteme k prvnímu. Pak 3. řádek odečteme od 2. a ten pak odečteme od 1..

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1, -1, -1 \\ -1, \lambda + 1, -1 \\ -1, -1, \lambda + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, (\lambda + 1)^2 - 1, -\lambda - 2 \\ -1, \lambda + 1, -1 \\ -1, -1, \lambda + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, \lambda^2 + 2\lambda, -\lambda - 2 \\ 0, \lambda + 2, -\lambda - 2 \\ -1, -1, \lambda + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, \lambda^2 + \lambda - 2, 0 \\ 0, \lambda + 2, -\lambda - 2 \\ -1, -1, \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Z prvního řádku dostáváme $y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$. Z druhého řádku dostáváme $y' + 2y = z' + 2z \Rightarrow z' + 2z = 3C_2 e^t \Rightarrow z = C_3 e^{-2t} + C_2 e^t$. Třetí řádek dává $x = -y + z' + z = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - C_3 e^{-2t}$.

$$\text{Závěr:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = y + \cos t$$

$$y' = -x + 1$$

Převodem:

$$y'' = -x' = -y - \cos t \Rightarrow y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t, y_p = -\frac{t}{2} \sin t \Rightarrow y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{2} \sin t.$$

$$x = -y' + 1 \Rightarrow x = C_1 \sin t - C_2 \cos t + 1 + \frac{t \cos t}{2} + \frac{\sin t}{2}$$

$$\text{Závěr:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + (t \cos t + \sin t)/2 \\ -(t \sin t)/2 \end{pmatrix}$$

λ -matice

$$\begin{pmatrix} \lambda, -1 \\ 1, \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, -1 - \lambda^2 \\ 1, \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow y'' + y = 0$$

a dostáváme stejné rovnice jako výše.

$$x' = y$$

$$y' = x + e^t + e^{-t}$$

$$x'' = x + e^t + e^{-t} \Rightarrow x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} (e^t - e^{-t}) \Rightarrow y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2} (t + 1) + \frac{e^{-t}}{2} (t - 1)$$

$$\text{Závěr:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} -t \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

Implicitní funkce Zjistit, zda existuje jednoznačně $y(x)$ v okolí daného bodu a vypočítat v tomto bodě y'' . Všechny uvedené funkce mají spojité parciální derivace. Parciální derivace funkce f podle x, y značíme f_x, f_y .

$$f(x, y) = \log(xy) - x - y = 0, (1, 2), \quad f_x + f_y y' = \frac{1}{xy} (y + xy') - 1 - y' = 0, -\frac{1}{x^2} + \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} - y'' = 0$$

Dosazením bodu $(1, 2)$ za (x, y) zjistíme, že $f_y(1, 2) \neq 0, y'(2) = 0, y''(2) = 1$ pro $x = 1$

$$f(x, y) = 2x^2 y + y^3 - x = 0, (-1, 1), \quad f_x + f_y y' = 4xy - 1 + (2x^2 + 3y^2)y' = 0, 4 + 4xy' + (2x^2 + 3y^2)y'' = 0$$

Dosazením bodu $(-1, 1)$ za (x, y) zjistíme, že $f_y(1, 2) \neq 0, y'(1) = 1, y''(1) = 0$ pro $x = -1$