

Řešení příkladů ze cvičení MA3, 24.11.2025

Implicitní funkce

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + 2u + v &= 4 \\x + y + u + 2v &= 4 \quad P = (1, 0, 1, -1, 2) \\3x + 4y - z + 4u + 2v &= 2\end{aligned}$$

Hledáme parciální derivace funkcí $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ podle u v bodě P .

Uvedené tři rovnosti dávají zobrazení $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, což je $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde z definičním oboru bereme v $\mathbb{R}^2$ proměnné u, v a v $\mathbb{R}^3$ proměnné z, y, x . Snadno spočteme jakobián $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} = 4$ v celé rovině. Vypočteme parciální derivace podle u uvedených tří rovností:

$$\begin{aligned}x_u + 2y_u + 3z_u &= -2 \\x_u + y_u &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_u = 0, y_u = -1, z_u = 0. \\3x_u + 4y_u - z_u &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \quad P = (-1, 1, 1)\end{aligned}$$

Hledáme druhé derivace funkcí $x(z), y(z)$ v bodě P a rovnici tečny k průniku uvedených ploch v bodě P .

Máme zobrazení $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $z \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Jakobián $\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} = 6xy(x - y) (= 12$ v bodě $P)$, takže funkce $x(z), y(z)$ v okolí bodu P existují spolu s potřebnými derivacemi. Vypočteme parciální derivace podle z uvedených dvou rovností:

$$\begin{aligned}3x^2x' + 3y^2y' &= -3z^2 \quad \xRightarrow{P} \quad 3x' + 3y' = -3 \\2xx' + 2yy' &= -2z \quad \xRightarrow{P} \quad -2x' + 2y' = -2 \quad \Rightarrow \quad x'(P) = 0, y'(P) = -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6xx'^2 + 3x^2x'' + 6yy'^2 + 3y^2y'' &= -6z \quad \xRightarrow{P} \quad 3x'' + 3y'' = -12 \\2x'^2 + 2xx'' + 2y'^2 + 2yy'' &= -2 \quad \xRightarrow{P} \quad -2x'' + 2y'' = -4 \quad \Rightarrow \quad x''(P) = -1, y''(P) = -3.\end{aligned}$$

Hledaná tečna je popsána parametricky: $x = -1, y = 1 - t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$.

Extrémy funkcí více proměnných

$$f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1.$$

Položíme $\text{grad } f = 0$ a najdeme kritické body (parciální derivace existují v celé rovině).

$$\begin{aligned}6x^2 - 3y &= 0 \\-3x + 6y^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \text{dva kritické body } a_1 = (0, 0), a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Hessovu matici je $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$. Definitnost H v a_1 pomocí kvadratické formy $K(h)$, Sylvestrova kritéria minory H_1, H_2 a vlastních čísel λ_1, λ_2 (u Sylvestera existuje sudé $k (= 2)$, že $H_k < 0$)

$$H(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = -6hk \\ H_1 = 0, H_2 = -9 \\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow H \text{ je indefinitní}$$

$$H(a_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = 6h^2 - 6hk + 6k^2 = 6((h - k/2)^2 + 3k^2/4) \\ H_1 = 6, H_2 = 27 \\ \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow H \text{ je pozitivně definitní}$$

Daná funkce má na $\mathbb{R}^2$ jediný lokální extrém, a to lokální minimum v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, v bodě $(0, 0)$ je sedlo

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + y^2 + 5x^2.$$

Položíme $\text{grad } f = 0$ a najdeme kritické body (parciální derivace existují v celé rovině).

$$\begin{aligned} 6x^2 + y^2 + 10x &= 0 \\ 2xy + 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{čtyři kritické body } a_1 = (0, 0), a_2 = \left(-\frac{5}{3}, 0\right), a_3 = (-1, 2), a_4 = (-1, -2)$$

Dále postupujeme stejně jako u předchozího příkladu. Hessova matice je $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$.

$$H(a_1) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = 10h^2 + 2k^2 \\ H_1 = 10, H_2 = 20 \\ \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow H \text{ je pozitivně definitní}$$

$$H(a_2) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = -10h^2 - 4k^2/3 \\ H_1 = -10, H_2 = 40/3 \\ \lambda_1 = -10, \lambda_2 = -4/3 \end{cases} \Rightarrow H \text{ je negativně definitní}$$

$$H(a_3) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = -2h^2 + 8hk = -2(h - 2k)^2 + 8k^2 \\ H_1 = -2, H_2 = -16 \\ \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow H \text{ je indefinitní}$$

$$H(a_4) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K(h) = -2h^2 - 8hk = -2(h + 2k)^2 + 8k^2 \\ H_1 = -2, H_2 = -16 \\ \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow H \text{ je indefinitní}$$

Daná funkce má na $\mathbb{R}^2$ lokální minimum v bodě $(0, 0)$, lokální maximum v bodě $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, v bodech $(-1, 2), (-1, -2)$ jsou sedla.