

Řešení příkladů ze cvičení 1.12.2025

Extrémy funkcí více proměnných

(Ve všech příkladech jsou podmínky pro použití příslušných vět splněny: spojité druhé derivace, hodnost Jacobiho matice je maximální.)

Najděte lokální a globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ na $\mathbb{R}$.

Vyřešíme pro neznámé x, y, z rovnice $\text{grad } f = 0$, tj.

$$3x^2 + 12y = 0, \quad 2y + 12x = 0, \quad 2z + 2 = 0, \Rightarrow a_1 = (0, 0, -1), \quad a_2 = (24, -144, -1).$$

Druhé partiální derivace a příslušné kvadratické formy:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 12, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 2,$$

$$K(h, k, l)(a_1) = 24hk + 2k^2 + 2l^2 = 2(6h + k)^2 - 72h^2 + 2l^2$$

$$K(h, k, l)(a_2) = 144h^2 + 24hk + 2k^2 + 2l^2 = 2(6h + k)^2 + 72h^2 + 2l^2$$

Závěr: v bodě a_1 je sedlo, v bodě a_2 je lokální minimum.

Pokud bychom počítali vlastní body Hessianovy matice v bodě a_1 dostaneme čísla $2, 1 \pm \sqrt{145}$, které určují indefinitnost matice. Sylvesterovo pravidlo v tomto případě nepomůže, v případě bodu a_2 pomůže.

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 + 6xy$ na trojúhelníku s vrcholy $(-3, -2), (2, -2), (2, 3)$.

Nejdříve se rychle podíváme na lokální extrémy vnitřek trojúhelníku (i když v rámci úlohy stačí určit kritické body a dále je nezkoumat). Gradient funkce f je $(6x + 6y, -6y^2 + 6x)$ a ten je nulový v bodech $(0, 0), (1, -1)$ a tyto body patří do podmínky pro použití jsou splněny (spojité druhé derivace, hodnost Jacobiho matice vnitřku dané množiny. Hessova matice, postupně obecná, v $(0, 0)$, v $(1, -1)$):

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Takže v bodě $(0, 0)$ má f sedlo (zjistí se snadno pomocí vlastních čísel nebo kvadratické formy), v bodě $(1, -1)$ lokální minimum (Sylvester) s hodnotou -1 .

Za hranici budeme postupně do f dosazovat $y = -2, x = 2, y = x + 1$ a budeme hledat lokální extrémy funkcí:

1. $3x^2 + 16 - 12x$ na $(-3, 2)$;

2. $12 - 2y^3 + 12y$ na $(-2, 2)$;

3. $-2x^3 + 3x^2 - 2$ na $(-3, 2)$.

V první položce nedostáváme lokální extrém uvnitř intervalu, ve druhé položce mohou být v bodech $y = \pm\sqrt{2}$, ve třetí položce v bodech $x = 0, x = 1$. Sestavíme nyní tabulku hodnot všech uvedených kritických bodů, nejdříve vrcholy, pak vnitřní body stran a nakonec vnitřní body celé množiny. Dále usuzujeme stejně jako u extrémů funkcí jedné proměnné, tj. hledáme maximální a minimální hodnoty.

$(-3, -2)$	$(2, -2)$	$(2, 3)$	$(2, -\sqrt{2})$	$(2, \sqrt{2})$	$(1, 2)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
79	4	-6	-0,7	23,3	-1	2	0	-1

Závěr: Globální maximum je v bodě $(-3, -2)$, globální minimum v bodě $(2, 3)$.

Na obvodu trojúhelníku je např. v bodě $(2, -\sqrt{2})$ lokální minimum, ale dá se zjistit, že není bodem lokálního minima z hlediska celého trojúhelníku. V bodě $(2, \sqrt{2})$ funkce f má lokální maximum i vzhledem k celému trojúhelníku.

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na množině $M = \{(x, y); x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}$.

V popisu M se vyskytuje daná funkce, zkusíme proto dosadit do f výraz $2x - 4y$ za $x^2 + 2y^2$, takže zkoumáme extrémy funkce $g(x, y) = 2x - 4y$. Ale nikoli na $\mathbb{R}^2$. Získané kritické body musí ležet v M , jen jsem zjednodušili zkoumanou funkci. Pozor na to.

Protože M je elipsa $(x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 3$, zkusíme upravené polární souřadnice a dostaneme funkci $g(t)$:

$$x = 1 + \sqrt{3} \cos t, y = -1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin t, t \in [0, 2\pi], \Rightarrow g(t) = 6 + 2\sqrt{3} \cos t - 4\sqrt{\frac{3}{2}} \sin t$$

Funkce g má extrém pro $\tan t = -\sqrt{2}$, což znamená $\cos t = \mp 1/\sqrt{3}, \sin t = \pm \sqrt{2/3}$. Dostáváme dva kritické body $(0, 0), (2, -2)$ s hodnotami f postupně 0, 12. Protože f je spojitá, M je kompaktní a máme jen dva kritické body, jsme hotovi.

Závěr. Funkce f nabývá na M maxima 12 v bodě $(2, -2)$ a minima 0 v bodě $(0, 0)$.

Pokud budeme řešit úlohu pomocí Lagrangeových multiplikátorů, zkoumáme funkci $F(x, y, \lambda) = 2x - 4y + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$. Položíme $\text{grad } F = 0$:

$$1 + \lambda(x - 1) = 0, -1 + \lambda(y + 1) = 0, x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0.$$

Protože nemůže být $x = 1, y = -1$, dávají nám první dvě rovnice $x = -y$, což dosazením do třetí rovnice dává hledané kritické body jako výše.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $M = \{(x, y); x^2/8 + y^2/2 = 1\}$.

Použijeme upravené polární souřadnice $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, t \in [0, 2\pi]$ a postupujeme jako v předchozím příkladě.

$$g(t) = 4 \cos t \sin t = 2 \sin(2t) \Rightarrow \text{maximum pro } t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \text{ minimum pro } t = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Závěr. Funkce f nabývá na M maxima 2 v bodech $(2, 1)$ a $(-2, -1)$, minima -2 v bodech $(2, -1)$ a $(-2, 1)$.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 1/x^3 + 1/y^3$ na množině $M = \{(x, y); 1/x + 1/y = 2\}$.

Množina M je uzavřená, i když jsou v jejím popisu otevřené intervaly (posunutá větve hyperboly).

Nejdříve použijeme popis množiny M jako graf funkce $y = \frac{x}{2x-1}$, takže hledáme extrémy funkce (po dosazení za y) $g(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{12}{x} + 8$ na intervalu $(1/2, +\infty)$. Najdeme jediný kritický bod $x = 1$, ve kterém má funkce g lokální minimum (pomocí 2.derivace), jiné extrémy funkce nemá, protože na intervalu $(1/2, 1]$ je klesající, na intervalu $[1, \infty)$ rostoucí.

Závěr. Funkce f nabývá na M globální minimum 2 v bodě $(1, 1)$. Jiné extrémy nemá.

Lagrangeovy multiplikátory: Označíme $F(x, y, \lambda) = x^{-3} + y^{-3} + \lambda(x^{-1} + y^{-1} - 2)$.

$$\text{grad } F(x, y) = (-3x^{-4} - \lambda x^{-2}, -3y^{-4} - \lambda y^{-2}, x^{-1} + y^{-1} - 2) \Rightarrow \text{jeden krit.bod } x = y = 1, \lambda = -3.$$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^{-5} + 2\lambda x^{-3} & 0 \\ 0 & 12y^{-5} + 2\lambda y^{-3} \end{pmatrix} \Rightarrow H(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pozitivně definitní}$$

V bodě $(1, 1)$ dostáváme lokální minimum. To, že se jedná o globální minimum, je o něco složitější než v předchozím postupu. Např. je možné uvážit, že na omezeném průniku M s uzavřeným kvádrem K obsahujícím bod $(1, 1)$ uvnitř K , má f lokální maxima na hranici kvádrů a hodnoty v nich rostou se zvětšujícím se K .