

Poznámky k některým ODR 1.řádu.

ODR s homogenní funkcí

Funkce $f(x, y)$ se nazývá homogenní, pokud $f(tx, ty) = f(x, y)$ pro libovolná reálná t s požadavkem, aby x, y, tx, ty byly body definičního oboru funkce f . Pokud formálně použijeme $t = 1/x$, dostaneme $f(x, y) = f(1, y/x)$. Dá se tedy očekávat, že použitím substituce $u(x) = y(x)/x$ dostaneme ODR se separovanými proměnnými, a to $u'x + u = f(1, u)$. Po vyřešení této rovnice pro u dosadíme zpět $u = y/x$. Musíme předpokládat $x \neq 0$. Pokud má původní ODR v bodě $x = 0$ smysl, musíme se k tomu bodu vrátit k diskuzi po konci výpočtu.

Existence a jednoznačnost ODR bez obecné věty

Pro rovnice s homogenní funkcí (a pro některé další na příštích cvičeních) nemáte z přednášky tvrzení o existenci řešení a jejich jednoznačnosti. Tuto situaci lze částečně řešit bez pomoci obecné věty o existenci řešení jednoduchým postupem, který ale může ztroskotat na složitosti řešení.

Najdeme obecné řešení $y = g(x, C)$ dané ODR $f(x, y, y') = 0$, popřípadě i singulární řešení $y = g_i(x), i = 1, \dots$ na nějakých intervalech. Vezmeme bod (x_0, y_0) , pro který má rovnice smysl a snažíme se pomocí funkce f zjistit, co můžeme říci o existenci řešení v tomto bodě (to byly v našich příkladech situace, že např. osou y může procházet řešení jen počátkem a pod.). Pokud x_0 náleží do definičního oboru nalezeného řešení, zkusíme vypočítat C z rovnice $y_0 = g(x_0, C)$. Pokud se nám to povede, tímto bodem prochází řešení, pokud takové C existuje jediné, dostáváme jednoznačnost řešení za předpokladu, že jiná řešení než tvaru $g(x, C)$ v okolí bodu x_0 nemáme (což ale většinou nevíme).

V případě ODR s homogenní funkcí lze využít věty o existenci a jednoznačnosti pro ODR se separovanými proměnnými. Je-li $g(x)$ řešení ODR s homogenní funkcí a $x \neq 0$, je $xg(x)$ řešení příslušné ODR se separovanými proměnnými a naopak. Takže věta o existenci a jednoznačnosti platí i v případě, že pravá strana rovnice $y' = f(x, y)$ je homogenní funkce (s vyloučením bodu $x = 0$, pro který je nutná diskuze zvlášť).

Složitější úvahy jsou nutné u jiných případů, např. u Bernoulliovy rovnice $y' + p(x)y = y^r q(x)$, která se substitucí $z = y^{1-r}$ převede na lineární rovnici (pro lineární ODR budete mít příslušnou větu o existenci). Tyto postupy je zbytečné dělat pro každý typ rovnic zvlášť a je nejjednodušší znát od začátku obecnou větu o existenci a jednoznačnosti pro ODR.

Autonomní rovnice

Řešili jsme několik rovnic tvaru $y' = f(y)$, kde ve funkci f chyběla proměnná x . Tyto rovnice se nazývají *autonomní*. Jsou specifické v tom, že dovedeme o řešení říci hodně jeho vlastností, aniž rovnici vyřešíme. Často se uvažuje proměnná x jako čas (pak se většinou značí t a někdy se derivace podle času neznačí čárkou, ale tečkou nad funkcí, např. $\dot{y} = f(t)$). Řešením jsou funkce tvaru $g(x + C)$, takže řešení pro různá C jsou vzájemná posunutí. Zhruba řečeno, hledaný děj se v čase stále opakuje.

Pokud jsou např. $y = y_0, y = y_1$ stacionární řešení autonomní rovnice a $y_0 < y_1$, pak obecné řešení na daném intervalu pro x (v našich příkladech $\mathbb{R}$) je ryze monotónní pro $y \in (y_0, y_1)$. Z chování funkce $f(y)$ lze usoudit, zda je toto řešení maximální nebo se dá prodloužit pomocí stacionárních řešení.