

Poznámky k některým ODR 2.řádu.

Řešitelnost jednoduchých ODR 2. řádu

Z ODR 2.řádu probíráte jen obecnou teorii lineárních rovnic a řešíte jen lineární rovnice s konstantními koeficienty. Jsou však další ODR 2.řádu, které jsou jednoduché a snadno se řeší. Uvedeme některé, u kterých chybí ve vyjádření $y'' = f(x, y, y')$ některá proměnná ve funkci f .

$y'' = f(x)$, dvojitou integrací dostaneme

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

$y'' = f(y)$, po vynásobení y' a integraci vzhledem k y dostaneme rovnici 1.º:

$$y''y' = f(y)y' \Rightarrow y''y' dx = f(y) dy \Rightarrow y'^2/2 = \int f(y) dy.$$

$y'' = f(y')$, substitucí $z = y'$ dostaneme rovnici 1.řádu $z' = f(z)$, její řešení $z = \int f(z) dz = F(z) + C$ a tedy rovnici $y' = F(y') + C$ 1.řádu pro původní proměnné.

$y'' = f(x, y')$, substitucí $z = y'$ převedeme rovnici 2.řádu. na dvě rovnice 1.řádu

$$z' = f(x, z), y' = z.$$

$y'' = f(y, y')$, položením $y' = p(y)$ dostáváme $y'' = \frac{dp}{dy}y' = p'p$ a tedy opět dvě rovnice 1.řádu

$$p'p = f(y, p), y' = p.$$

Obecně platí, že jakmile chybí v rovnici y , lze substitucí $z = y'$ snížit řád rovnice. V lineárních rovnicích lze snížit řád rovnice i v případě, známe-li jedno řešení y_1 . Potom substitucí $z = y_1 y$ také snížíme řád rovnice.

Poznámky k metodě neurčitých koeficientů

Zopakujme větu týkající se řešení pomocí neurčitých koeficientů pro lineární rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty.

Je dána rovnice $y'' + a_1 y' + a_0 = q(x)$, kde pravá strana $q(x)$ je tvaru $P(x)e^{ax} \sin(bx) + Q(x)e^{ax} \cos bx$ a P, Q jsou polynomy. Potom je její partikulární řešení tvaru

$$z(x) = x^r e^{ax} (R(x) \sin(bx) + S(x) \cos(bx)),$$

kde R, S jsou polynomy stupně nejvýše maximum ze stupňů P, Q a

1. $r = 0$, jestliže $a + bi$ není kořenem charakteristické rovnice;
2. $r = 1$, jestliže $a + bi$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice;
3. $r = 2$, jestliže $a + bi$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice.

Je nutné si uvědomit, že i když je na pravé straně např. jen sinus, ve výsledku může být jak sinus tak kosinus.

Speciální tvar pravé strany určují čísla a, b, k , kde k označíme maximum stupňů polynomů P, Q . Podle tvrzení věty určíme číslo r . Řešení bude tvaru

$$x^r e^{ax} ((A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0) \sin(bx) + (B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0) \cos(bx))$$

Tento výraz dosadíme za y do dané rovnice, vykrátíme vzniklou rovnost výrazem e^{ax} a porovnáme polynomy u $\sin(bx)$ na levé a pravé straně a totéž pro polynomy u $\cos(bx)$. Dostaneme soustavu $2k + 2$ lineárních algebraických rovnic o $2k + 2$ neznámých. Vyřešíme a výsledky dosadíme do výše uvedeného tvaru řešení.

Zda je lepší použít variaci konstant nebo metodu neurčitých koeficientů, záleží na tvaru rovnice. Pokud bude k velké, může být jednodušší variace konstant. Pro malá k a např. při chybějících goniometrických funkcích na pravé straně rovnice, bývá jednodušší metoda neurčitých koeficientů. Při této metodě odpadá integrace ve variaci konstant a složitost způsobuje jen počet algebraických rovnic a derivování uvedeného tvaru řešení při dosazování do rovnice.

Pokud je pravá strana lineární rovnice součtem konečného počtu funkcí, např. $q_1(x), q_2(x)$, lze vypočítat partikulární řešení pro každou z uvedených funkcí zvlášť, dostaneme řešení y_1, y_2 . Řešení rovnice s pravou stranou $q_1 + q_2$ pak bude součet $y_1 + y_2$. Pozor, toto platí jen pro lineární rovnice.