

Poznámky ke stejnoměrné konvergenci.

Než přejdeme k Diniho větě o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí, musíme si ukázat tzv. **Borelovu větu**:

Nechť $[a, b]$ je uzavřený omezený interval a pro každé $x \in [a, b]$ je (a_x, b_x) otevřený interval obsahující x . Pak existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, že $\bigcup \{(a_{x_i}, b_{x_i}); i = 1, \dots, n\} \supset [a, b]$.

Řečeno jinými slovy, z každého pokrytí uzavřeného omezeného intervalu otevřenými intervaly lze vybrat konečné pokrytí. Důkaz využívá vlastnosti existence supremu reálných čísel:

Označme $s = \sup\{c \in [a, b]; [a, c] \text{ lze pokrýt konečně mnoha intervaly } (a_x, b_x)\}$. Určitě bod a lze tak pokrýt (intervalem (a_a, b_a)), takže $c > a$. Předpokládejme, že $c < b$ a vezmeme konečnou množinu $K \subset [a, b]$, že $\{(a_x, b_x); x \in K\}$ pokrývá $[a, c]$. Pak ale $b_c > c$ a $[a, \min\{b, b_c\}]$ je pokryto konečným počtem intervalů $\{(a_x, b_x); x \in K \cup \{c\}\}$, což je spor s definicí čísla c .

Uvedeme dva důsledky Borelové věty pro stejnoměrnou konvergenci.

Minule jsme si zavedli tzv. *lokálně stejnoměrnou konvergenci* (f_n konvergují k f na J *lokálně stejnoměrně*, jestliže pro každý bod $x \in J$ existuje $\delta_x > 0$, že $f_n \Rightarrow f$ na $J \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$). Tj. pro dané $\varepsilon > 0$ a každé $x \in J$ existuje n_x , že pro $n \geq n_x, y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ je $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Je-li J uzavřený omezený interval $[a, b]$, existuje konečně mnoho těchto intervalů $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i), i = 1, \dots, m$ pokrývajících $[a, b]$. Nyní stačí vzít $n_0 = \max\{n_{x_i}; i = 1, \dots, m\}$ a pro $n \geq n_0, y \in [a, b]$ je $(f_n(y) - f(y)) < \varepsilon$. Dostáváme tvrzení:

Na uzavřeném omezeném intervalu konverguje lokálně stejnoměrně konvergenční posloupnost stejnoměrně.

Lokálně stejnoměrná konvergence na intervalu J tedy znamená stejnoměrnou konvergenci na každém uzavřeném omezeném intervalu v J .

Druhým důsledkem je tzv. **Diniho věta**:

Nechť f_n, f jsou spojité funkce na omezeném intervalu $[a, b]$ a $f_n \rightarrow f$ monotónně. Pak $f_n \Rightarrow f$.

Protože stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá, tato věta je charakterizace pro spojité funkce: Pokud spojitě funkce f_n konvergují na $[a, b]$ monotónně k f , pak $f_n \Rightarrow f$ právě když je f spojitá. Uzavřenost a omezenost intervalu je podstatná. Důkaz používá předchozí Borelovu větu. Větu dokážeme pro neklesající posloupnost, tj. $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n . Uvědomíme si, že pro $n \geq n_0$ je $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ právě když $f(x) - f_{n_0}(x) < \varepsilon$.

Nechť $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n . Vezmeme libovolné $\varepsilon > 0$. Z předpokladů vyplývá:

1. pro každé $x \in [a, b]$ existuje $n_x \in \mathbb{N}$, že $f - f_{n_x} < \varepsilon$;
2. existuje $\delta_1 > 0$, že $y \in [a, b], |y - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
3. existuje $\delta_2 > 0$, že $y \in [a, b], |y - x| < \delta_2 \Rightarrow |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon$

Zvolíme $\delta_x = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a použijeme nerovnost pro součet absolutních hodnot:

$$|f(y) - f_{n_x}(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)|$$

Na pravé straně je druhý sčítanec menší než ε a zbývající jsou menší než ε pro $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Takže pro tato y je $f(y) - f_{n_x}(y) < 3\varepsilon$ jakmile $n \geq n_x$ a $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Podle předchozí Borelové věty existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_m$, že $\bigcup_{i=1}^m (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \supset [a, b]$. Pro $n \geq \max\{n_{x_i}; i = 1, \dots, m\}$ je potom $f(y) - f_n(y) < 3\varepsilon$, což dokazuje $f_n \Rightarrow f$.