

## Mocninné řady

### Dvojitý faktoriál

Podíváme se nejdříve na poslední příklad, kde jsme použili dvojitý faktoriál. Jeho definice:

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\dots 2, \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1, \quad 0!! = 1, \quad (-1)!! = 1.$$

Snadno se zjistí následující vzorce:

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Použití dvojitých faktoriálů může značně zjednodušit zápis ve vzorci, např. v uvedeném Taylorově řadě pro  $\arcsin x$ .

### Taylorovy řady

Platí následující tvrzení:

Jestliže  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ , je uvedená řada Taylorovou řadou funkce  $f$  v bodě  $x_0$ , tj.  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

Důkaz: Platí  $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(x-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$ , takže  $f^{(k)}(x) = n!a_k$  protože pro bod  $x = x_0$  může být jediný člen uvedené řady nenulový.

### Použití mocninných řad pro řešení diferenciálních rovnic

Máme rovnici  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  s možnými počátečními podmínkami v bodě  $x_0$ . Předpokládáme řešení ve tvaru  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ . Dosadíme za  $y, y', \dots$  derivace řady člen po členu (nejlépe je posunout indexy, např. u  $y''$  o 2, tak, aby všechny řady měly tvar  $\sum c_n x^n$ ). Všechny funkce  $\varphi(x)$  vyskytující se v  $F$  musíme nahradit jejich Taylorovými řadami v bodě  $x_0$ . To je jistá potíž, protože např. výraz  $e^x y'$  musíme uvést v roznásobeném tvaru  $\sum c_n (x-x_0)^n$  řadu  $\sum x^n/n!$ .  $\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ . Pokud jsou koeficienty u  $y^{(i)}$  jen polynomy, potíž nenastane. Stejně tak není problém, když je funkce  $\varphi(x)$  na pravé straně, tj.  $f(x, y, y', \dots) = \varphi(x)$ .

Po této úpravě dostaneme rovnost dvou mocninných řad o stejném středu  $x_0$ . Potom se koeficienty u  $(x-x_0)^n$  na obou stranách rovnosti musí rovnat. Dostaneme vztah mezi koeficienty  $a_n$ , někdy jednoduchý, u složitějších rovnic komplikovaný. K tomu musíme znát následující tvrzení:

Nechť dvě mocninné řady  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$  se rovnají na některém otevřeném intervalu obsahujícím  $x_0$ . Pak  $a_n = b_n$  pro každé  $n$ .

Důkaz provedeme sporem. Nechť  $f(x) = g(x)$  na  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  a existuje první index  $k$ , že  $a_k \neq b_k$ . Podle výše uvedené věty o Taylorových řadách je  $f^{(k)}(x_0) \neq g^{(k)}(x_0)$ , což je spor (stejně funkce na otevřeném intervalu mají všechny derivace na tomto intervalu stejné).