

Míry, 26.11.2025

1. Nechť $\mathcal{A}$ je soubor všech konečných podmnožin v $\mathbb{R}$. Pro $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ je $\mu(A) = \sum_{i=1}^k |x_i|$.
Ověřte, že $\mathcal{A}$ je soubor uzavřený na konečná sjednocení a konečné průniky a zjistěte zda je μ spočetně aditivní.

2. Modifikace předchozí úlohy: Nechť $\mathcal{A}$ je soubor všech nejvýše spočetných podmnožin v $\mathbb{R}$. Pro $A = \{x_i\}_{i=1}^N$, kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definujme $\mu(A) = \sum_{i=1}^N |x_i|$. Ověřte, že $\mathcal{A}$ je soubor uzavřený na spočetná sjednocení a spočetné průniky a že μ je spočetně aditivní.

3. Nechť μ je tzv. Diracova míra na všech podmnožinách neprázdné množiny X s pevným bodem $x \in X$, tj. pro $A \subset X$ je

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x \notin A \\ 1 & \text{jestliže } x \in A \end{cases}$$

(Pokud chápeme $\mu_x(A)$ jako funkci proměnné x při pevném A , dostáváme tzv. indikátor (nebo charakteristickou funkci) χ_A množiny A . Dokažte, že μ je míra.

4. Nechť X je spočetná množina a μ je dvouhodnotová míra na všech podmnožinách X . Ukažte, že existuje $x \in X$, že μ je předchozí Diracova míra μ_x .

5. Označme $\mathcal{S}$ soustavu všech sjednocení konečně mnoha otevřených intervalů na $\mathbb{R}$ a pro $S = (a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$ označme $\ell(S) = (b_1 - a_1) + \dots + (b_n - a_n)$. Pro $A \subset \mathbb{R}$ definujme

$$\mu_*(A) = \sup\{\ell(S); S \in \mathcal{S}, A \supset S\}, \quad \mu^*(A) = \inf\{\ell(S); S \in \mathcal{S}, A \subset S\}.$$

Pokud $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, řekneme, že A je jordanovsky měřitelná a má Jordanovu míru $\mu(A) = \mu_*(A)$.

Ukažte následující vlastnosti:

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Pro každou neomezenou množinu A v $\mathbb{R}$ je $\mu^*(A) = \infty$.
3. Množina jordanovsky měřitelných množin není σ -algebra.
4. Pokud vezmeme za $\mathcal{S}$ sjednocení spočetně mnoha otevřených intervalů, bude Jordanova míra každé spočetné množiny rovna 0.