

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 17.12.2025

V následujících příkladech uvedené integrály existují, uvedené funkce jsou na uvedených intervalech spojité.

1. Funkce e^{-ax^2} má integrovatelnou majorantu e^{-rx^2} pro $x > 0, a > r$ pro libovolné $r > 0$. Protože pro každé $a > 0$ existuje $0 < r < a$, je podle tvrzení o spojitosti integrálu s parametrem funkce F spojitá v bodě a .

2. Snadno spočteme $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx$, což je 1 na $x \in [0, 1]$ a 0 na $(1, \infty)$. Potom $\int_0^{\infty}$ z této limity je roven 1. Zadaná limita je tedy rovna 1, pokud integrovaná funkce má integrovatelnou majorantu nezávislou na n pro nějaká $n > n_0$. Stačí dokázat, že $\frac{1+x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{1}{x^2}$ pro $x \in [x_0, \infty)$ pro nějaké x_0 (což plyne z limity racionálních funkcí v ∞), protože $\frac{1+x^n}{1+x^{2n}}$ je spojitá na $[0, x_0]$ a tedy je na tomto intervalu omezená nějakou konstantou K , což je současně i hledaná majoranta.

3. Zvolme $a_0 > 0$. Pro dokazovanou rovnost v bodě a_0 stačí najít integrovatelnou majorantu pro xe^{-ax} na $(0, \infty)$ nezávislou na a z nějakého okolí a_0 . Na libovolném intervalu $[0, x_0], x_0 > 0$, je tato funkce spojitá a tedy omezená. Podobně jako v předchozím příkladě zvolíme $0 < r < a_0$ a najdeme hledanou majorantu pro $a > r$. Zřejmě je $e^{-ax} \leq e^{-rx}$ na $[0, \infty)$ a $x \leq e^{rx/2}$ na nějakém $[x_0, \infty)$, takže je $xe^{-ax} \leq e^{-rx/2}$ na $[x_0, \infty)$ pro $a > r$.

4. Stačí použít rovnost (dokážeme příště) $F(a) = \frac{\pi}{2}$ pro každé $a > 0$.

5. Označíme $F(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-ax} \sin^2(bx))}{x} dx$. Vysvětlili jsme, proč budeme rovnost derivovat podle b a nikoli podle a . Derivace integrované funkce podle b má integrovatelnou majorantu e^{-rx} pro $x > 0, a > r > 0, b \in \mathbb{R}$. Platí tedy

$$\frac{\partial(F(a, b))}{\partial b} = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(2bx) dx = \frac{2b}{a^2 + 4b^2} \Rightarrow F(a, b) = \frac{1}{4} \log(a^2 + 4b^2) + C(a), a > r, b \in \mathbb{R}$$

(konstanta C může záviset na a). Rovnost platí pro všechna $b \in \mathbb{R}$ a tedy i pro $b = 0$. Víme z definice F , že $F(a, 0) = 0$ pro všechna $a > r$, takže $C(a) = -\frac{1}{4} \log a^2$ a tedy $F(a, b) = \frac{1}{4} \log \left(1 + \frac{4b^2}{a^2}\right)$ pro všechna $a > r$. Ale $r > 0$ bylo libovolné, takže rovnost platí pro všechna $a > 0$.