

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 8.10.2025

Viz Poznámky pro existenci a jednoznačnost řešení ODR s homogenní funkcí.

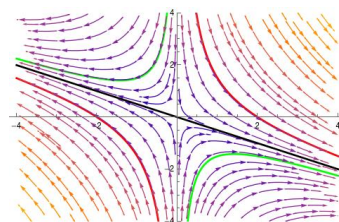
Najděte všechna maximální řešení rovnice $xy' + x + y = 0, k \in \mathbb{R}$.

Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jediným bodem na přímce $x = 0$, kterým může procházet řešení je počátek. Budeme dále předpokládat $x \neq 0$. Potom $y' = 1 - \frac{y}{x}$ a na pravé straně je homogenní funkce. Použijeme novou závisle proměnnou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, takže $y' = xu' + u$ a dostaneme rovnici se separovanými proměnnými:

$$xu' = 1 - 2u \Rightarrow 1 + 2u = \frac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), (0, \infty) \Rightarrow y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), (0, \infty).$$

Uvedené řešení je maximální, nedá se prodloužit do bodu $x = 0$ kromě případu $C = 0$, kdy dostaneme řešení $y = -x/2$ na $\mathbb{R}$. Pro jistotu ověříme, že každým bodem roviny kromě přímky $x = 0$ prochází jediné řešení: $x_0 \neq 0, y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ existuje jediné C splňující $y_0 = \frac{C}{x_0} - \frac{x_0}{2}$, a to $C = \frac{2x_0 y_0 + x_0^2}{2}$.

Závěr: rovnice $xy' + x + y = 0$ má na $\mathbb{R}$ jedno maximální řešení $y = -\frac{x}{2}$. Všechna ostatní maximální řešení jsou tvaru $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ na intervalech $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Každým bodem roviny kromě přímky $x = 0$ prochází jediné řešení, bodem $(0, 0)$ prochází jediné řešení $y = -\frac{x}{2}$, body $(0, y_0), y_0 \neq 0$, neprochází žádné řešení.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $xyy' = y^2 - x^2$

Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jediným bodem na přímce $x = 0$, kterým může procházet řešení je počátek. Funkce $y = 0$ není řešením a budeme dále předpokládat $x \neq 0, y \neq 0$. Potom $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$ a na pravé straně je homogenní funkce. Použijeme novou závisle proměnnou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, takže $y' = xu' + u$ a dostaneme rovnici se separovanými proměnnými:

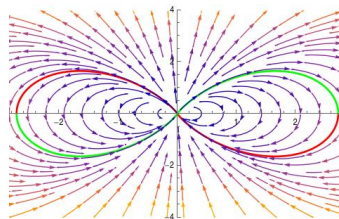
$$xu + u' = u - \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = -\log|x| + C, C \in \mathbb{R}, \log|x| < C \Rightarrow y^2 = x^2(2C - \log x^2), C \in \mathbb{R}, 0 < |x| < e^C.$$

Jako v předchozím příkladě snadno ověříme, že každým bodem roviny kromě os x, y prochází řešení; přitom si musíme ověřit, že získané C je větší než $\log|x_0|$ (což ze vzorce pro vypočtené C hned vyplyne). Pro $y = 0$ bychom dostali $e^C = x_0$ nebo $e^C = -x_0$, což nelze. Musíme se tedy podívat na chování řešení v krajních bodech jeho definičního intervalu. Řešení tam má hodnoty rovné 0. Derivace však budou v těchto bodech nevlastní, takže řešení nelze do těchto bodů prodloužit. Opravdu, $y' = \pm(\sqrt{2C - \log x^2} - 1/\sqrt{2C - \log x^2})$.

Závěr: rovnice $xyy' = y^2 - x^2$ má za všechna maximální řešení funkce tvaru pro $C \in \mathbb{R}$:

$$y = \pm x\sqrt{2C - \log x^2} \text{ na intervalech } (-e^C, 0), (0, e^C).$$

Všemi body roviny kromě os x, y prochází jediné řešení, osami x, y neprochází žádné řešení.



Najděte všechna maximální řešení rovnice $xy' + y = \log x + 1$

Jedná se o lineární ODR. Rovnice má smysl na intervalu $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, funkce $1/x$ a $(\log x + 1)/x$ jsou tam spojitě, takže v bodech tohoto intervalu řešení rovnice existuje a je jediné.

Homogenní část rovnice má tvar $xy' + y = 0$ a má řešení $y_h = C/x, C \in \mathbb{R}$ (dokonce i pro záporná x , ale nás zajímají jen $x > 0$).

Hledáme partikulární řešení ve tvaru $y = C(x)/x$:

$$y' = C'/x - C/x^2 \text{ dosadíme do rovnice } \Rightarrow C' = \log x + 1 \Rightarrow C = x \log x \Rightarrow y_p = \log x, x \in (0, \infty).$$

Závěr: Obecné řešení rovnice $xy' + y = \log x + 1$ je rovno $y = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \log x, C \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$.

Někdo si mohl všimnout, že levá strana rovnice je rovna $(xy)'$, takže $(xy)' = \log x + 1$, po integraci $xy = x \log x + C$ a tedy řešením je $y = \log x + \frac{C}{x}$.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + y \cos x = \sin(2x)$

Jedná se o lineární ODR. Rovnice má smysl na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, funkce $\cos x$ a $\sin(2x)$ jsou tam spojité, takže v každém bodě roviny řešení rovnice existuje a je jediné.

Homogenní část rovnice má tvar $y' + y \cos x = 0$ s řešením $y = Ce^{-\sin x}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Variace konstanty: $C'e^{-\sin x} = \sin(2x) \Rightarrow C = -\cos(2x)e^{\sin x}/2 \Rightarrow y_p = -\cos(2x)/2$, $x \in \mathbb{R}$.

Závěr: Rovnice $y' + y \cos x = \sin(2x)$ má obecné řešení $y = y_h + y_p = Ce^{-\sin x} - \frac{\cos(2x)}{2}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Najděte všechna maximální řešení rovnice $xy' + y = xy^2 \log x$

Jedná se o Bernoulliovu rovnici, která má obecný tvar $y' + p(x) = y^r q(x)$, $r \neq 0, 1$, která se převede na lineární rovnici pomocí nové závisle proměnné $z = y^{1-r}$ (viz Poznámky pro obecný postup).

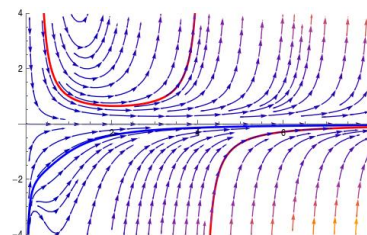
Zadaná rovnice má smysl na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ a každým bodem tohoto intervalu prochází jediné řešení. Rovnice má stacionární řešení $y = 0$. Do rovnice dosadíme $z = y^{-1}$, předpokládáme $y, z \neq 0$:

$$x \left(-\frac{z'}{z^2} \right) + \frac{1}{z} = \frac{x}{z^2} \log x \Rightarrow -xz' + z = x \log x \Rightarrow z_h = Cx, z_p = -x \frac{\log^2 x}{2} \Rightarrow z = Cx - x \frac{\log^2 x}{2}, C \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení pro z je na intervalu $(0, \infty)$ pro všechna $C \in \mathbb{R}$. Obecné řešení zadané rovnice je ale převrácená hodnota funkce z , takže hodnota z nesmí být nulová. To nastane pokud je $2C = \log^2 x$. Tato rovnice nemá řešení pro $C < 0$ a má jediné řešení $x = 1$ pro $C = 0$. Pro $C > 0$ má dvě řešení $x = e^{\pm\sqrt{2C}}$.

Závěr: rovnice $xy' + y = xy^2 \log x$ má singulární řešení $y = 0$ na $(0, \infty)$ a následující maximální řešení. Jsou to všechna řešení, každým bodem poloviny $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ prochází jediné řešení.

$$y = \frac{2}{x(2C - \log^2 x)} \begin{cases} C < 0, x \in (0, \infty) \\ C = 0, x \in (0, 1), x \in (1, \infty) \\ C > 0, x \in (0, e^{-\sqrt{2C}}), x \in (e^{-\sqrt{2C}}, e^{\sqrt{2C}}), x \in (e^{\sqrt{2C}}, \infty) \end{cases}$$



Červený graf je pro $C = 1$ (na graf se nevešla třetí část), modrý je pro $C = -1$.