

Lineární ODR 2.řádu, neurčitě koeficienty

$y'' + 2y' - 3y = 6$, vyřešíme metodou neurčitých koeficientů.

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné 1 a -3 , takže $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. Partikulární řešení bude konstanta A . Dosazením tohoto tvaru řešení získáme $A = -2$.

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 2$.

$y'' - 2y' + y = x^2$, vyřešíme metodou neurčitých koeficientů.

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen rovný 1, takže $y_h = e^x(C_1 + C_2 x)$. Partikulární řešení bude mít tvar $Ax^2 + Bx + C$. Po dosazení do rovnice dostaneme $A = 1, B = 4, C = 6$ (hodnota $A = 1$ se dá odhadnout z rovnice a stačí počítat B, C).

Závěr: Zadaná rovnice má řešení $y = e^x(C_1 + C_2 x + x^2 + 4x + 6)$.

$y'' + y = x \cos x$, napíšeme jen příslušný tvar partikulárního řešení.

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné $\pm i$, takže $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Protože číslo $a + ib$ z metody neurčitých koeficientů je rovno i , dostáváme následující tvar partikulárního řešení:

$$y_p = x(Ax + B) \cos x + x(Cx + D) \sin x.$$

$y'' + y = x e^x \cos x$, napíšeme jen příslušný tvar partikulárního řešení.

Řešíme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice má kořeny rovné $\pm i$, takže $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Partikulární řešení:

$$y_p = (Ax + B)e^x \cos x + (Cx + D)e^x \sin x.$$

Soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty Viz Poznámky pro postup řešení.

$$x' = 2x + 2y, y' = x + 3y$$

$$y'' = x' + 3y' = (2x + 2y) + 3y' = (2(y' - 3y) + 2y) + 3y' \Rightarrow y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Řešení rovnice 2.ř. pro y : $y = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$. Dosadíme do druhé rovnice:

$$C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} = x + 3(C_1 e^t + C_2 e^{4t}) \Rightarrow x = -2C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Závěr: Zadaná soustava má řešení $y = C_1 e^t + C_2 e^{4t}, x = -2C_1 e^t + C_2 e^{4t}$ na $\mathbb{R}$.

$$x' = 4y, y' = x$$

$$y'' = x' = 4y \Rightarrow y'' - 4y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \Rightarrow x = y' = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

Závěr: Zadaná soustava má řešení $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, x = -2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}$ na $\mathbb{R}$.

Stejněměrná konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}$, kde $f_n(x) = x^n - x^{2n}$. Viz Poznámky

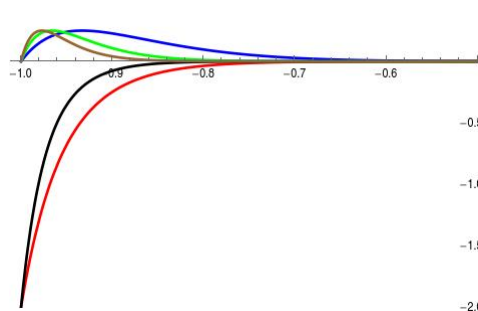
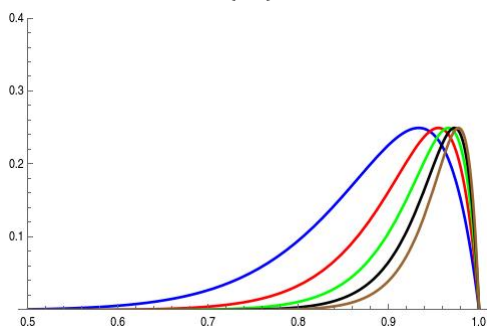
Snadno zjistíme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{2n})$ má vlastní limitu jen pro $x \in (-1, 1]$ a to rovnou 0. Pro stejnoměrnou konvergenci najdeme $x_n = \sup\{|x^n - x^{2n}|\}$ na $(-1, 0]$:

$$f'_n = nx^{n-1}(1 - 2x^n) \Rightarrow \text{kritické body extrémů: } -1, 0, 1/\sqrt[n]{2}, 1 \text{ s hodnotami postupně } 2 \text{ nebo } 0, 0, 1/4, 0.$$

Dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| \neq 0$, takže na celém intervalu $(-1, 1]$ daná posloupnost nekongruje stejnoměrně.

Zkusíme interval zmenšit. V intervalu nesmí být krajním bodem číslo -1. Vezmeme tedy libovolné číslo $a \in (-1, 0)$ jako levý krajní bod nového intervalu. Ve zmenšeném intervalu nemohou být ani body x_n od nějakého n_0 počínaje. Protože x_n konvergují k 0 stačí vzít libovolný bod $b \in (0, 1)$ jako pravý krajní bod intervalu. V nových krajních bodech a, b má $|f_n|$ hodnoty $|a^n - a^{2n}|, |b^n - b^{2n}|$. To jsou jediná možná maxima funkce $|f_n|$ na $[a, b]$ pro $n > n_0$, kdy $x_n > b$. Tato maxima konvergují k 0, takže posloupnost $\{f_n\}$ konvergují stejnoměrně na každém intervalu $[a, b], -1 < a < b < 1$.

Závěr: Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, 1)$.



Rostoucí n má postupně barvy: modrá, červená, zelená, černá, hnědá