

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 22.10.2025

Stenoměřná konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}$:

$$\left\{ \sin \frac{x}{n^2} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

Je zřejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Funkce lichá a stačí dále předpokládat $x \geq 0$. Použijeme odhad $|\sin \frac{x}{n^2}| \leq \frac{x}{n^2}$. Odtud vyplývá, že daná posloupnost konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[-a, a]$, $a > 0$. Nemůže konvergovat stejnoměrně na neomezeném intervalu, protože takový interval obsahuje pro každé n body s hodnotou f_n rovnou 1 (v bodech $(\pi/2 + k\pi)n^2, k \in \mathbb{Z}$).

Závěr: Daná posloupnost konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

Je zřejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Použijeme charakterizaci stejnoměrné konvergence pomocí suprem. Opět stačí předpokládat $x \geq 0$. Pak v krajních bodech intervalu $[0, \infty)$ mají funkce f_n hodnotu nebo limitu rovné 0. Maximum f_n poznáme z derivace:

$$f'_n = \sqrt{n} \cos(nx) \Rightarrow f'_n = 0 \text{ pro } x_{n,k} = \frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}, \quad f_n(x_{n,k}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Závěr: Daná posloupnost konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \frac{x}{1+n^2x^2} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

Postupujeme stejně, jako v předchozím příkladě. Je zřejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

$$f'_n = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow f'_n = 0 \text{ pro } x_n^2 = \frac{1}{n^2}, \quad f_n(x_n) = \frac{1/n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Závěr: Daná posloupnost konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}, x \in \mathbb{R}$$

Postupujeme stejně, jako v předchozím příkladě. Je zřejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Funkce f_n je n -násobek funkce z předchozího příkladu, takže $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ a daná posloupnost na $\mathbb{R}$ nekonverguje stejnoměrně.

Z derivace plyne, že f_n je klesající na $[1/n, \infty)$ a pro $a > 1/n$ má největší hodnotu v bodě a . Víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = 0$, takže na $[a, \infty)$ daná řada konverguje stejnoměrně pro každé $a > 0$.

Závěr: Daná posloupnost konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\{x^n e^{-n(x-1)}\} = \left\{ \left(\frac{x}{e^{x-1}} \right)^n \right\}, x \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Vidíme, že limita funkcí f_n je nespojitá v bodě $x = 1$, takže daná posloupnost nemůže stejnoměrně konvergovat v žádném intervalu obsahujícím bod 1.

$$f_n(x)' = n \left(\frac{x}{e^{x-1}} \right)^{n-1} \frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2x-2}} \neq 0 \text{ pro } x \neq 0, 1$$

Funkce f_n je rostoucí na $[0, 1]$ a klesající na $[1, \infty)$. Má hodnotu nebo limitu rovnou 0 v bodech $0, \infty$. Na intervalu $[0, a]$, $0 < a < 1$, má největší hodnotu v bodě a , na intervalu $[a, \infty)$, $a > 1$ má největší hodnotu v bodě a . Hodnoty funkcí $f_n(a)$ koňvergují k 0, takže na uvedených intervalech je daná posloupnost stejnoměrně konvergentní.

Závěr: Daná posloupnost konverguje lokálně stejnoměrně na $[0, \infty) \setminus \{1\}$.