

**Stenoměrná konvergence řady funkcí  $\{f_n\}$ :**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, x \in \mathbb{R}$$

Je zřejmé, že řada konverguje bodově pouze pro  $x > 0$ . Funkce  $f_n$  jsou klesající (exponenciála) a na  $(0, \infty)$  mají supremum 1, takže na  $(0, \infty)$  nemůže řada konvergovat stejnoměrně. Zvolme libovolné  $a > 0$  zkoumejme řadu na  $[a, \infty)$ . Maximum  $f_n$  na tomto intervalu je hodnota  $f_n(a)$  v bodě  $x = a$ . Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-na}$  konverguje, jedná se o geometrickou řadu s kvocientem  $e^{-a} < 1$ . Podle Weierstrassova kritéria tedy dostáváme:

*Závěr: Daná řada konverguje stejnoměrně na  $[a, \infty)$  pro libovolné  $a > 0$ , tedy konverguje lokálně stejnoměrně na  $(0, \infty)$ .*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, x \in (-1, 1)$$

Je zřejmé, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, x \in (-1, 1)$ . Když se  $x$  blíží k 1 zleva, konvergují  $f_n$  k  $\infty$ , když se  $x$  blíží k -1 zprava, konvergují  $f_n$  k  $\infty$ , takže  $\{f_n\}$  nemůže konvergovat k 0 stejnoměrně na  $(-1, 1)$ . Vezmeme tedy nějaké  $a \in (0, 1)$  a zkusíme chování  $\sum f_n$  na  $[-a, a]$ . Derivací lze jednoduše zjistit, že  $|f_n|$  je klesající na  $(-1, 0)$  a rostoucí na  $(0, 1)$ . Maximum funkce  $|f_n|$  na  $[-a, a]$  je tedy větší z čísel  $\frac{a^n}{1-a^n}$  nebo  $\frac{|(-a)^n|}{|1-(-a)^n|}$ , což je první z nich. Platí

$$\frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a} \text{ konverguje (geometrická řada) ,}$$

takže podle Weierstrassova kritéria :

*Závěr: Daná řada konverguje stejnoměrně na  $[-a, a]$  pro libovolné  $0 < a < 1$ , tedy konverguje lokálně stejnoměrně na  $(-1, 1)$ .*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg(x^n e^{-n}), x \in [0, \infty)$$

Snadno zjistíme, že  $\lim_n f_n(x) = 0$  pouze pro  $x \in [0, e)$ . Pro nezáporná  $x$  jsou funkce  $f_n$  rostoucí ( $x^n$  i  $\arctg$  jsou tam rostoucí), takže  $\sup f_n$  na  $[0, a]$  je  $f_n(a)$ . Daná řada tedy nemůže stejnoměrně konvergovat na  $[0, e)$ . Vezmeme libovolné  $a \in (0, e)$ , potom  $\max f_n$  na  $[0, a]$  je  $f_n(a)$ . Protože  $\arctg$  je na  $[0, \infty)$  konkávní a  $f'_n(0) = 1$ , leží graf funkce  $f_n$  pod přímkou  $y = x$  pro nezáporná  $x$ . Tudíž platí

$$\arctg(x^n e^{-n}) \leq a^n e^{-n}, x \in [0, a], \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-n} \text{ konverguje (geometrická řada s kvocientem } \frac{a}{e} < 1, \text{)}$$

takže podle Weierstrassova kritéria :

*Závěr: Daná řada konverguje stejnoměrně na  $[0, a]$  pro libovolné  $0 < a < e$ , tedy konverguje lokálně stejnoměrně na  $[0, e)$ .*

**Poloměr konvergence  $\rho$  mocninných řad ( $\rho = 1/\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ )**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

*Závěr: Poloměr konvergence dané mocninné řady je roven 1.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \Rightarrow \rho = 0.$$

*Závěr: Poloměr konvergence dané mocninné řady je roven 0.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n(n+1)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n(n+1)}}} = 0 \Rightarrow \rho = \infty.$$

*Závěr: Poloměr konvergence dané mocninné řady je roven  $\infty$ .*