

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 19.11.2025

Mocninné řady:

(Poznámky obsahují vysvětlení následujících postupů.)

Zjistěte poloměr konvergence následujících řad a ověřte konvergenci v krajních bodech:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{5n+1} \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{5n+1}, \sqrt[n]{a_n} = 2 \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{konvergence na } (1, 2).$$

Dosažením krajních bodů $x = \pm 1$ dostaneme konvergenci v 1, divergenci v 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n^2)}}{2^n} \Rightarrow a_{n^2} = \frac{1}{2^n}, \text{ jinak } a_n = 0 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}} = 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow \text{konvergence na } (-1, 1)$$

Dosažením krajních bodů $x = 1, x = 2$ dostaneme konvergenci v obou krajních bodech..

Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ má součet $\frac{1}{1-x}, |x| < 1$, takže její neurčitý integrál je

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C, \text{ dosažením } x=0 \text{ dostaneme } C=0.$$

Dosažením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme hledaný součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \log 2$.

Pomocí mocninných řad vyřešte diferenciální rovnici $y' = y, y(0) = 1$.

Předpokládáme řešení ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zderivujeme ho, dosadíme do rovnice a porovnáme koeficienty. Získáme rekurentně zadanou posloupnost.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \Rightarrow \forall n : a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_0}{n!}, y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$

Dostáváme řešení $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Pomocí mocninných řad vyřešte diferenciální rovnici $y'' - xy' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Předpokládáme řešení ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zderivujeme ho, dosadíme do rovnice a porovnáme koeficienty.

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \Rightarrow \forall n : (n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - a_n = 0.$$

Dostáváme $a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$. Z počátečních podmínek plyne $a_0 = 1, a_1 = 0$, takže $a_n = 0$ pro všechna lichá n . Pro sudá je $a_{2n} = \frac{1}{(2n)!!} = \frac{1}{2^n n!}$.

Dostáváme řešení $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = e^{x^2/2}$.

Zjistěte Taylorovu řadu funkce $\arcsin x$ v bodě 0.

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

(Pro definici $k!!$ viz Poznámky.) Tedy $\arcsin x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1}$. Protože $\arcsin 0 = 0$, je $C = 0$. Z konvergence uvedené geometrické řady plyne konvergence řady pro $\arcsin x$ na intervalu $(-1, 1)$. Řada konverguje k $\arcsin x$ i v krajních bodech $x = \pm 1$ (pro $x = -1$ to vyplývá z Leibnizovy věty, pro $x = 1$ viz Poznámky.)