

Řešení příkladů ze cvičení Kalkulus 2, 26.11.2025

Příklady 1-3 jsou jednoduché a přímé. U příkladu 1 si stačí uvědomit, že neexistuje nekonečná soustava neprázdných množin, jejíž sjednocení je konečná množina. U příkladu 2 je vhodné si vzpomenout, že součet řady nezáporných čísel nezávisí na uzávorkování ani permutaci řady.

4. Máme míru μ např. na $\mathbb{N}$, která nabývá jen hodnot 0 a nějaké $a > 0$. Pak $a = \mu(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\})$ Musí tedy mít aspoň jedno n_0 nenulovou míru. Pokud by dva body měly nenulovou míru, tedy číslo a , jejich sjednocení by mělo míru $2a$, což není možné. Takže $\mu = \mu_{n_0}$.

5. 1. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $A = \{x\}$. Žádný neprázdný otevřený interval není částí $\{x\}$, takže $\mu_*(A) = 0$. Protože $A \subset (x - 1/n, x + 1/n) \in \mathcal{S}$, je i $\mu^*(A) \leq \inf 2/n = 0$.

2. Sjednocení konečně mnoha omezených intervalů je omezená množina, takže v pokrytí neomezené množiny A prvkem z $\mathcal{S}$ musí obsahovat neomezený interval a tedy $\mu^*(A) = \infty$.

3. Víme z 1, že jednobodové množiny jsou jordanovsky měřitelné. Např. $\mathbb{N}$ ale není jordanovsky měřitelná (z 2 plyne $\mu^*(\mathbb{N}) = \infty$; protože Žádný neprázdný otevřený interval není částí $\mathbb{N}$, je $\mu_*(\mathbb{N}) = 0$.

4. Stačí dokázat, že pro každou spočetnou množinu A a $\varepsilon > 0$ existuje spočetně mnoho otevřených intervalů J_n , jejichž součet délek je menší než 2ε a jejichž sjednocení obsahuje A . Pro $A = \{x_n\}$ mají intervaly $J_n = (x_n - \varepsilon/2^n, x_n + \varepsilon/2^n)$ požadovanou vlastnost.