

4 HAUSDORFFOVA DIMENZE

4.1 Hausdorffova míra

Definice 4.1. Pomocné množiny pro Hausdorffovu míru

Nechť $s, \delta > 0$ a A je podmnožina metrického prostoru. Definujeme

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s; \bigcup_i U_i \supset A, \forall i : U_i \subset X, \text{diam}(U_i) < \delta \right\}.$$

Snadno zjistíme, že pro $0 < \delta \leq \delta'$ je $H_{\delta'}^s(A) \leq H_\delta^s(A)$. Lze proto definovat:

Definice 4.2. Hausdorffova míra

Nechť $s > 0$ a A je podmnožina metrického prostoru. Definujeme

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

a nazveme $H^s(A)$ *s-dimenzionální Hausdorffovou mírou* množiny A .

Definice 4.3. Submíra, vnější míra

Vnější míra nebo-li submíra μ na X přiřazuje každé podmnožině $A \subset X$ hodnotu $\mu(A)$ mající vlastnosti

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. pro $A \subset B$ je $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie);
3. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (subaditivita).

Věta 4.4. Hausdorffova míra je vnější míra

Hausdorffova míra H^s na podmnožinách X je vnější míra na X .

Věta 4.5. Aditivita pro velké vzdálenosti

Nechť $\{A_n\} \subset X$ a vzdálenost množin A_n, A_m je pro $n \neq m$ větší než nějaké $r > 0$. Pak $H^s(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} H^s(A_n)$.

Věta 4.6. Hausdorffova míra a hölderovské zobrazení

Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ je hölderovské zobrazení stupně $\alpha > 0$ s konstantou k . Pak pro $A \subset X$ platí

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq k^{\frac{s}{\alpha}} H^s(A).$$

Důsledek 4.7. Hausdorffova míra a lipschitzovské zobrazení

Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$, $A \subset X$.

1. *Je-li f lipschitzovské s konstantou k , je $H^s(f(A)) \leq k^s H^s(A)$.*
2. *Je-li f násobení v $\mathbb{R}^n$, tj. $f(x) = \lambda x, \lambda > 0$, je $H^s(f(A)) = \lambda^s H^s(A)$.*
3. *Je-li f isometrie (např. posunutí, otočení v $\mathbb{R}^n$), je $H^s(f(A)) = H^s(A)$.*

4.2 Hausdorffova dimenze

Je-li $0 < s < s'$, lze pro součty v definici H_δ^s psát

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^{s'} = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s (\text{diam}(U_i))^{s'-s} \leq \delta^{s'-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s.$$

Použijeme inf a dostaneme $H_\delta^{s'}(A) \leq \delta^{s'-s} H_\delta^s(A)$. Použitím limity $\delta \rightarrow 0_+$ dostaneme tvrzení:

Pozorování 4.8. Skok v Hausdorffově míře

Je-li $0 < s$ a $H^s(A) < \infty$, je $H^{s'}(A) = 0$ pro každé $s' > s$.

Tento výsledek umožňuje následující definici, kde $\inf$ a $\sup$ se berou v množině $[0, \infty)$.

Definice 4.9. Hausdorffova dimenze

Pro $A \subset X$ definujeme

$$\dim_H(A) = \inf\{s > 0; H^s(A) = 0\} = \sup\{s > 0; H^s(A) = \infty\}.$$

Číslo $\dim_H(A)$ se nazývá *Hausdorffova dimenze* množiny nebo prostoru A .

Věta 4.10. Monotonie Hausdorffovy dimenze

1. Je-li $A \subset B$, je $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.
2. Platí rovnost $\dim_H(\bigcup_n A_n) = \sup_n \dim_H(A_n)$.

Věta 4.11. Hausdorffova dimenze a hölderovské zobrazení

1. Je-li $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ hölderovské zobrazení stupně $\alpha > 0$, je $\dim_H(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(A)$ pro $A \subset X$.
2. Je-li předchozí f lipschitzovské, je $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$.
3. Jsou-li f i f^{-1} lipschitzovská, je $\dim_H(f(A)) = \dim_H(A)$.

Věta 4.12. Cantorova množina

Hausdorffova dimenze Cantorovy množiny je rovna $\frac{\log 2}{\log 3}$.