

Věta 3.11. Knasterova, Kuratowského a Mazurkiewiczova věta, 1929

Nechť $A_0, \dots, A_n$ jsou uzavřené podmnožiny simplexu $S = (a_0, \dots, a_n)$, které mají vlastnost $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\} \subset A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_k}$ pro každou podmnožinu $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\} \subset \{a_0, \dots, a_n\}$. Potom $\bigcap_{i=0}^n A_i \neq \emptyset$.

Z předchozí věty už se dostane jednoduchý (ale netriviální) důkaz Brouwerovy věty pro simplex, a tedy pro kouli a libovolnou konvexní kompaktní podmnožinu euklidovského prostoru a jejich retrakty.

Věta 3.12. Brouwerova věta pro simplex

Každý simplex má vlastnost pevného bodu.

3.3 Borsukovy věty

Spernerovo lemma má mnoho zobecnění. Podobnou formulaci, ale místo simplexu pro jednoduchý komplex na jednotkové sféře v ℓ_1 , dokázal Ky Fan. Podobně jako ze Spernerova lemmatu plyne věta Knastera, Kuratowského a Mazurkiewiczze, plyne z Fanovy věty následující tvrzení.

Věta 3.13. Ljusternik, Schnirelmann, 1930

Nechť $A_1, \dots, A_n$ je uzavřené pokrytí sféry S^{n-1} . Pak existuje i takové, že $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.

Z předchozí věty plynou následující tři zajímavá a hodně používaná tvrzení (druhá věta se časem nazývá Borsukova-Ulamova věta, protože Ulam ji už dříve zformuloval).

Věta 3.14. Borsuk, 1933

1. Neexistuje spojitě liché (antipodální) zobrazení $S^n \rightarrow S^{n-1}$.
2. Pro každé spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje $x \in S^n$, že $f(x) = f(-x)$.
3. Je-li $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitě a liché, existuje $x \in S^n$, že $f(x) = 0$.

Jako jednoduchý důsledek dostaneme závažnou větu:

Věta 3.15. Homeomorfismus mezi euklidovskými prostory

Je-li $n, m \in \mathbb{N}, n > m$, není žádné spojitě zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ prosté. Tedy tyto dva prostory nejsou homeomorfní.

Tvrzení plyne z uvedené Borsukovy-Ulamovy věty, protože $\mathbb{R}^n$ obsahuje S^m .

Pokud známe ekvivalenci

Koule B^n má FPP právě když S^{n-1} není retraktem B^n ,

plyne z první uvedené Borsukovy věty jiný důkaz Brouwerovy věty o pevném bodě. Kdyby totiž existovala retrakce $B^n \rightarrow S^{n-1}$, dá se toto zobrazení chápat jako zobrazení z horní polosféry na svou hranici a rozšířit ho jako liché zobrazení na dolní polosféru. Tím bychom dostali liché spojitě zobrazení $S^n \rightarrow S^{n-1}$, což není možné podle Borsukovy věty.

Neodpřednesený doplněk

Brouwerova věta nejde rozšířit na nekonečnou dimenzi. Uvedeme známý Kakutaniho příklad $f : B \rightarrow B$, kde B je jednotková koule v ℓ_2 a $f(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{\sqrt{1 - \|x\|_2}, x_1, x_2, \dots\}$. Snadno ověříte, že f je spojitá a nemá pevný bod. Pokud se ale předpokládá, že zobrazení je tzv. kompaktní, má pevný bod:

Věta 3.16. Schauder, 1930, 1934

Je-li $f : C \rightarrow C$ spojitě zobrazení na uzavřené konvexní podmnožině C normovaného lineárního prostoru takové, že $f(C)$ je částí kompaktní množiny, má pevný bod.

Na lokálně konvexní prostory rozšířil tvrzení Tichonov. Další zobecnění Brouwerovy věty jsou pro množinová zobrazení (set-valued maps) nebo tvrzení o společných pevných bodech pro více zobrazení.

Zmíníme se více o přístupu algebraické topologie. Tento přístup totiž má zajímavé důsledky.

V algebraické topologii se prostoru X přiřazuje posloupnost tzv. homologických grup $H_n(X)$, $n = 0, 1, \dots$, tak, že spojitá zobrazení $f : X \rightarrow Y$ se vhodně transformují do homomorfizmů $f_n^* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$

zachovávající skládání zobrazení. V případě, že X je komplex (což je náš případ), se homologické grupy definují pomocí lineárních funkcí na stranách simplexů (tedy kombinatoricky). Snadno se ukáže, že pro $k, n > 0$ je $H_n(B^k) = 0$ (protože koule se dá stáhnout spojitě do bodu), složitěji se ukáže, že podobné rovnosti platí i pro sféru s jednou výjimkou: $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Pro oba prostory jsou H_0 rovny $\mathbb{Z}$. Z těchto rovností už snadno plyne, že S^{n-1} není retraktem B^n neboť pak by $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ byla faktorgrupou grupy $H_{n-1}(B^n) = 0$, což nejde.

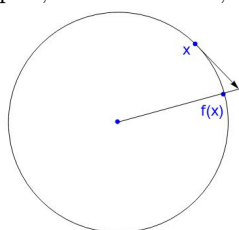
V případě polyedrů (sjednocení všech simplexů v souvislém komplexu) jsou výše uvedené grupy konečně generované a homomorfizmy mezi nimi se dají popsat maticemi (jako u lineárních zobrazení), takže má smysl mluvit o stopě (trace, $\text{tr}(f)$) homomorfizmu f (součet čísel na diagonále matice). Lze definovat tzv. Lefschetzův index spojitěho zobrazení f mezi polyedry: $\Lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_i^*)$, kde n je dimenze polyedru.

Věta 3.17. Lefschetz, 1930, 1934

Je-li $\Lambda(f) \neq 0$, má f pevný bod.

Protože $H_0(B^n) = \mathbb{Z}$ je jediná nenulová homologická grupa koule, pro spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow B^n$ je $\Lambda(f) = 1$, takže f má pevný bod. Lefschetzova v2ta je tedy obecn2j39 ne6 Brouwerova v2ta.

Protože $H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $H_k(S^n) = 0$ pro ostatní k , je $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$, kde $\deg(f)$ značí stupeň, zhruba řečeno, kolikrát obraz sféry při f obtočí sféru (to je názorné u kružnice).



V každém bodě x sféry vezmeme nenulový vektor mířící ven, kratší než je poloměr sféry. Koncový bod vektoru spojíme s počátkem a průsečík se sférou označíme $f(x)$. Dostaneme zobrazení $f : S^n \rightarrow S^n$. Předpokládejme, že f je spojitě (pak mluvíme o spojitěm vektorovém poli).

Zobrazení f má stupeň 1, takže $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n$ a tedy $\Lambda(f) = 2$ pro n sudé a má pevný bod. To znamená, že vektor v tomto pevném bodě je kolmý na sféru.

Je-li n liché, např. $2k - 1$, pak v bodě $x = (x_1, \dots, x_{2k})$ máme tečný vektor $(x_{k+1}, \dots, x_{2k}, -x_1, \dots, -x_k)$, takže dostáváme netriviální tečné pole na S^n .

Věta 3.18

Na S^n existuje netriviální tečné vektorové pole právě když n je liché.

Toto tvrzení (hairy ball problem) se populárně vyslovuje jako, že sféra lze učesat jedině když má lichou dimenzi (u sudé dimenze musí vždy nějaký vlas trčet ven). Výsledek pro $n = 2$ dokázal Poincaré (1885), obecně Brouwer (1912). I když se to nezdá, má mnoho aplikací a plyne z n2j i Brouwerova v2ta.