

Na přednášce jsme shrnuli trochu jinými slovy postup vedoucí k vkládání funkcí mezi jiné a z toho plynoucí tvrzení o rozšiřování funkcí.

Zmínili jsme se o vzorcích, používaných před zhruba 100 lety k rozšíření spojitých funkcí na metrickém prostoru. Zvláště byl zdůrazněn Brouwerův postup v Euklidovských prostorech, který vede k rozšiřování funkcí do normovaných a ještě obecnějších topologických lineárních prostorů.

1.3 Hölderovská zobrazení

Definice 1.16. Hölderovská zobrazení

Zobrazení metrických prostorů $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ se nazývá *hölderovské stupně* $\alpha > 0$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, že pro každé $x, y \in X$ platí

$$e(f(x), f(y)) \leq k d^\alpha(x, y).$$

Je-li $\alpha = 1$, nazývá se f *lipschitzovské*. Lipschitzovské zobrazení se nazývá *kontrakce*, jestliže $k < 1$

Snadno se ukáže, že každé hölderovské zobrazení je stejnoměrně spojitě, existují stejnoměrně spojitě funkce na kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$, které nejsou hölderovské pro žádné $\alpha > 0$.

Jako příklady poslouží např. x^α (α -hölderovská na $[0, \infty)$, což je snadné) nebo Cantorova funkce, která je α -hölderovská na $[0, 1]$ pro každé $0 < \alpha \leq \frac{\log}{\log}$, což je složitější. Každá funkce $d(x, A)$ je lipschitzovská. Funkce α -hölderovská na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ je pro $\alpha > 1$ konstantní.

Minule jsme použili fakt, že je-li d metrika, je i $\sqrt{d}$ metrika. Toto tvrzení rozšíříme pro d^α pro $\alpha \in (0, 1)$. Odtud vyplývá, že zobrazení je α -hölderovské vzhledem k d právě když je lipschitzovské vzhledem k d^α . Tak lze převést některá zkoumání hölderovských funkcí na lipschitzovské (nebudou se měnit topologické vlastnosti, ale mění se některé metrické vlastnosti). Dokážeme více pro složení konkávní funkce s metrikou.

Věta 1.17. Metriky d a $g \circ d$ pro konkávní funkci g

Nechť $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je konkávní funkce, $g(0) = 0, g \neq 0$. Pak platí:

1. Funkce g je neklesající, kladná na $(0, \infty)$ a rostoucí na $[0, \delta]$ pro nějaké $\delta > 0$.
2. Je-li d metrika na X , je $g \circ d$ metrika na X , která je ekvivalentní s d , pokud je g spojitá v 0_+ .

Zbývá věta o rozšíření hölderovských funkcí. Minule jsme použili konstrukci, která vede k lipschitzovské funkci (to jsme ještě nedokázali).

Věta 1.18. Konstrukce lipschitzovských funkcí

Nechť (X, ρ) je neprázdný pseudometrický prostor, $A \subset X, A \neq \emptyset$ a $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Pak následující funkce jsou lipschitzovské pro libovolné $k > 0$ na podprostorech v (X, ρ) , kde mají vlastní hodnoty:

$$\psi(x) = \sup\{\varphi(z) - k \rho(x, z); z \in A\}, \quad \tau(x) = \inf\{\varphi(z) + k \rho(x, z); z \in A\}.$$

Platí $\tau \leq \varphi \leq \psi$ na A . Nerovnost $\psi \leq \tau$ na A platí, právě když φ je lipschitzovská s konstantou k (potom $\psi = \varphi = \tau$ on A , $\psi \leq \tau$ na X a ψ, τ mají vlastní hodnoty na celém X).

Důkaz. Platí $\psi(x) > -\infty, \tau(x) < \infty$. Vezmeme libovolné $x, y \in X$ a např. $\infty > \psi(x) > \psi(y)$. Chceme dokázat $\psi(x) - \psi(y) \leq k \rho(x, y)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $z_0 \in A$, že $\varphi(z_0) - k \rho(x, z_0) > \psi(x) - \varepsilon$. Pak

$$\psi(x) - \psi(y) < (\varphi(z_0) - k \rho(x, z_0) + \varepsilon) - (\varphi(z_0) - k \rho(y, z_0)) = k(\rho(y, z_0) - \rho(x, z_0)) + \varepsilon \leq k \rho(x, y) + \varepsilon,$$

což implikuje dokazovanou nerovnost. Postup pro funkci τ je podobný.

Nerovnosti $\tau(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$ pro $x \in A$ dostaneme dosazením $z = x$ do definic funkcí ψ, τ . Pokud platí $\psi \leq \tau$ na A , je $\psi = \tau = \varphi$ na A a tedy φ je lipschitzovská s konstantou k . Dokážeme, že je-li φ lipschitzovská s konstantou k , je $\psi \leq \tau$ dokonce na X . Předpokládejme, že existuje $x \in X$, že $\psi(x) > \tau(x)$. Pak existují $u, v \in A$, že

$$\varphi(u) - k \rho(x, u) > \varphi(v) + k \rho(x, v) \Rightarrow \varphi(u) - \varphi(v) > k(\rho(x, u) + \rho(x, v)) \geq k \rho(u, v),$$

což je spor s lipschitzovskou vlastností funkce φ . Potom je $-\infty < \psi \leq \tau < \infty$ na X . □

Důsledkem je rozšiřovací tvrzení pro α -hölderovské funkce.

Důsledek 1.19. Rozšíření α -hölderovských funkcí

Nechť (X, d) je pseudometrický prostor, $\emptyset \neq A \subset X$ a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je α -hölderovská funkce s konstantou k pro $\alpha \in (0, 1]$. Pak existuje α -hölderovská funkce $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ s konstantou k , že $F \upharpoonright A = f$.