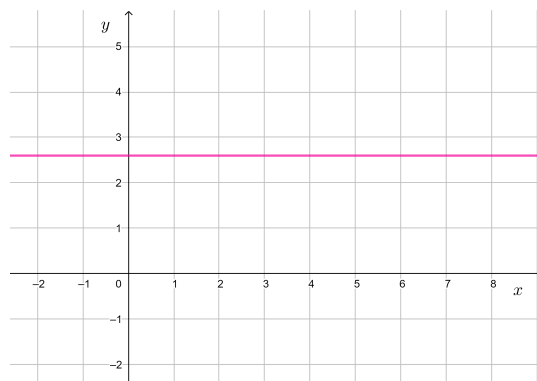


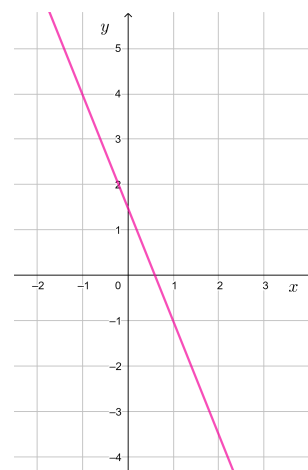
Přehled elementárních funkcí

Konstantní funkce

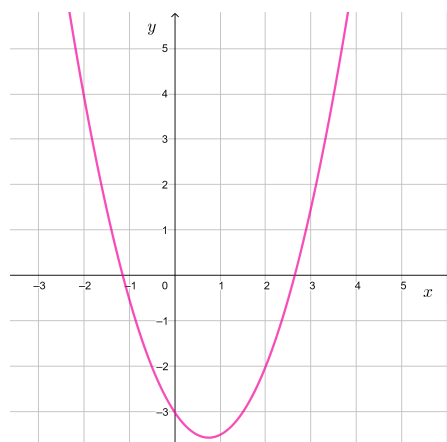
- $y = b; b \in \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R}$
- graf: přímka rovnoběžná s osou x
- lze definovat jako speciální případ lineární funkce

*Lineární funkce*

- $y = ax + b; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R}$
- graf: přímka (různoběžná s osou x)
- pro $a > 0$ rostoucí, pro $a < 0$ klesající
- je-li $b = 0$, jde o tzv. *přímou úměrnost*

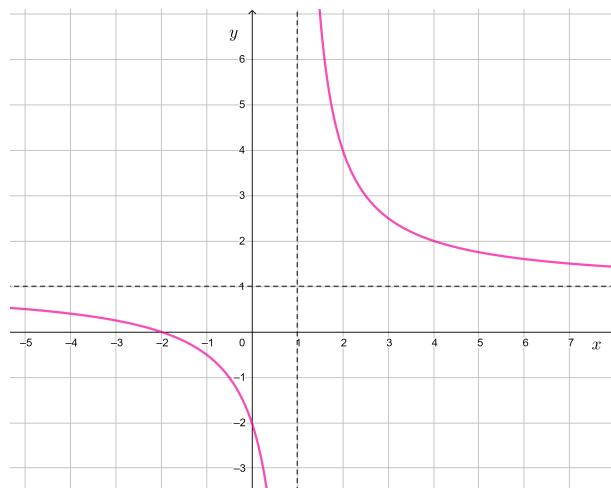
*Kvadratická funkce*

- $y = ax^2 + bx + c; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R}$
- graf: parabola
- pro $a > 0$ konvexní, pro $a < 0$ konkávní

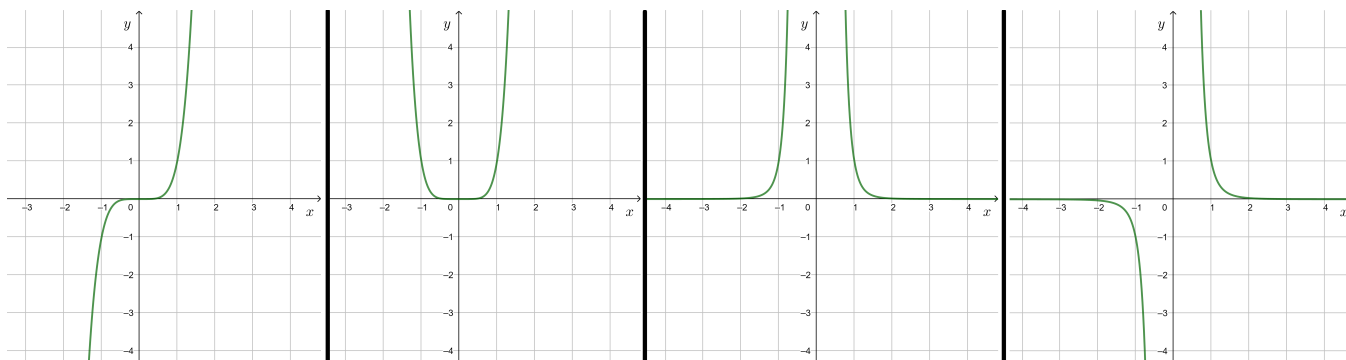


Lineární lomená funkce

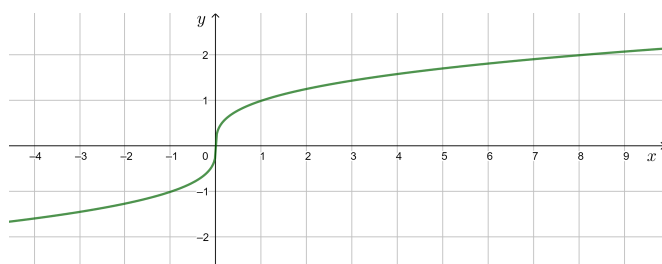
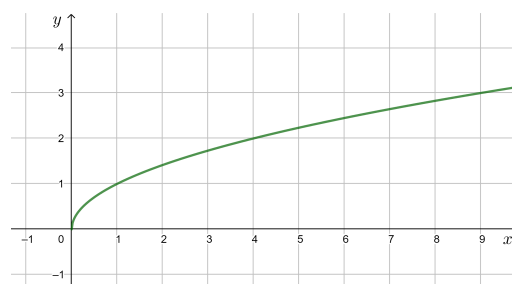
- $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$
- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- graf: hyperbola
- je-li $a = d = 0, b \neq 0$, jde o tzv. nepřímou úměrnost

*Mocninná funkce*

- $y = x^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- pro $n \in \mathbb{Z}^+$ je $D = \mathbb{R}$, pro $n \in \mathbb{Z}^-$ je $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) n liché,b) n sudé,c) $-n$ sudé,d) $-n$ liché*Odmocnina*

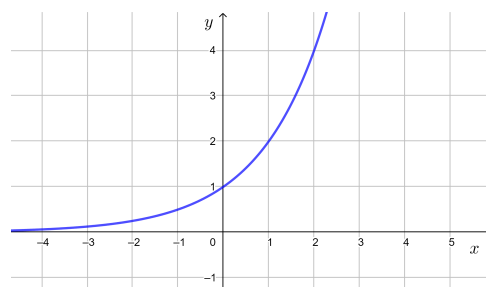
- $y = \sqrt[n]{x}$; $n \in \mathbb{N}$
- $D = \langle 0; \infty \rangle$
- pro n liché lze D rozšířit na celé $\mathbb{R}$
- rostoucí



Exponenciální funkce

- $y = a^x$; $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $D = \mathbb{R}$
- graf: exponenciála
- pro $a \in (0; 1)$ klesající, pro $a > 1$ rostoucí
- *přirozená exponenciální funkce:*

$$y = e^x; \text{ Eulerovo číslo } e \doteq 2,72$$

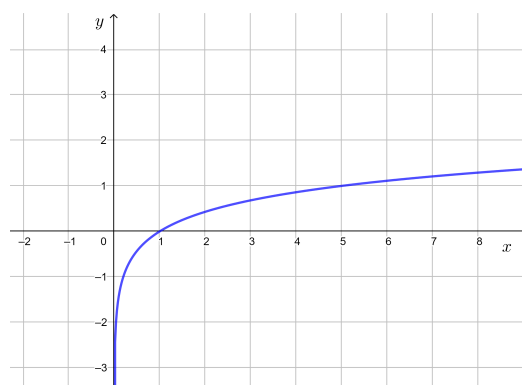
*Logaritmická funkce*

- $y = \log_a x$; $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$
- $D = \mathbb{R}^+$
- pro $a \in (0; 1)$ klesající, pro $a > 1$ rostoucí
- inverzní k exponenciální funkci, tj.
 $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$
- *přirozená logaritmická funkce:*

$$y = \log_e x = \ln x$$

- logaritmická funkce se základem 10:

$$y = \log_{10} x = \log x$$

**Úlohy**

- 1) Ke každému obrázku výše odhadněte předpis příslušné funkce.
- 2) Dokažte, že lineární funkce f s předpisem $y = ax + b$ je pro $a \in \mathbb{R}^-$ klesající.
- 3) Vyjádřete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem kvadratické funkce f s předpisem $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, v závislosti na proměnných a , b , c .
- 4) Jakou funkci získáme, připustíme-li v předpisu lineární lomené funkce (viz výše) $c = 0$, resp. $ad - bc = 0$?
- 5) Odvoďte souřadnice středu a rovnice asymptot grafu lineární lomené funkce f s předpisem $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.
- 6) Jakou funkci získáme, připustíme-li v předpisu mocninné funkce (viz výše) $n = 0$? Načrtněte její graf a uveďte vlastnosti.

7) Dokažte, že $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $(a^m)^n = a^{mn}$

c) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

Pokuste se uvedená tvrzení zobecnit pro $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, a zformulujte obdobná pravidla pro podíl $\frac{a^m}{a^n}$, resp. $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

8) Dokažte, že $\forall a \in \langle 0; \infty \rangle, \forall b \in \langle 0; \infty \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

b) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

9) Dokažte, že $\forall a \in (0; \infty) \setminus \{1\}, \forall r \in (0; \infty), \forall s \in (0; \infty), \forall m \in \langle 0; \infty \rangle$ platí:

a) $\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s$

b) $\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$

c) $\log_a r^m = m \cdot \log_a r$

10) Dokažte, že $\forall a \in (0; \infty) \setminus \{1\}, \forall s \in (0; \infty) \setminus \{1\}, \forall r \in (0; \infty)$ platí: $\log_s r = \frac{\log_a r}{\log_a s}$

Literatura

Odvárko, O. (1994). *Matematika pro gymnázia – funkce*. Prometheus, Praha.

Odvárko, O. (2018). *Matematika pro střední školy. Funkce*. Prometheus, Praha.

Richter, J. (2011). *Funkce*. Stránka webového portálu KDM MFF UK.
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/funkce/>

Petáková, J. (2021). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

Petrášová, V., Štěpánková, H. (2014). *Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. PF JU, České Budějovice. https://old.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/petrask_skriptaMA1f.pdf

Hasil, P. (2014). *Poznámky z matematiky*. Mendelu, Brno.
https://user.mendelu.cz/smykalov/Skripta_MATM1.pdf