

Komplexní čísla

algebraický tvar (reálná a imaginární část, imaginární jednotka), číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, komplexní jednotka, Gaussova rovina

1. Dokažte, že sčítání a násobení komplexních čísel je komutativní i asociativní.

2. Ukažte, že ke každému nenulovému $z \in \mathbb{C}$ existuje $z' \in \mathbb{C}$ takové, že $z \cdot z' = 1$.

3. Dokažte, že pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

a) $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$

d) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$, kde $z_1 \neq 0$

b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, kde $z_2 \neq 0$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

4. Dokažte, že pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, kde $z_2 \neq 0$

5. Upravte a výsledek запиšte v algebraickém tvaru:

a) $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43}$

b) $(1 + i)^{-2}$

c) $\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right| + \left|\frac{2+i}{1-2i}\right|}{1 + 2i}$

6. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x} = 1 + i$

b) $(3 - 4i)^2 - 2\bar{x} = x$

7. Určete všechna ryze imaginární čísla z , pro něž $|z + 1| = |z - 2i|$.

8. Dokažte, že pro libovolná $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí, že

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

9. V Gaussově rovině zobrazte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž platí:

a) $|1 - i| > |z| \geq 1$

b) $\left|z - \frac{1}{1+i}\right| < |z|$

exponenciální a goniometrický tvar, Moivreova věta

10. Vyjádřete komplexní číslo z v algebraickém i goniometrickém tvaru:

a) $z = \frac{2}{1+i^7}$

b) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot 6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^2$

c) $z = \frac{1}{2} e^{i \frac{17}{3} \pi}$

d) $z = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$

11. Zapište v exponenciálním tvaru číslo \bar{a} , jestliže:

a) $a = \cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}$

b) $a = 1 - i$

12. V KSS jsou dány body $O[0;0]$, $X[3;0]$, $A[1;1]$, $B[2;1]$, $C[3;1]$. Určete součet velikostí ostrých úhlů XOA , XOB , XOC .

kvadratická rovnice v \mathbb{C} , binomická rovnice

13. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $x^2 - 2x + 10 = 0$

b) $x^2 + 8 + 6i = 0$

c) $x^2 - 20 = ix(2i - x)$

14. Rovnice $x^2 + px + 21 = 0$ má jeden kořen $x_1 = -3 + 2i\sqrt{3}$. Vypočítejte druhý kořen a určete koeficient $p \in \mathbb{C}$.

15. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $x^3 + \frac{(1-i)^{48}}{(1+i)^{44} + i(1-i)^{46}} = 0$

b) $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Literatura

Petáková, J. (2021). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

Robová, J. et al. (2013). *Matematika pro střední školy: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Prometheus, Praha.

Calda, E. (1994). *Matematika pro gymnázia. Komplexní čísla*. Prometheus, Praha.