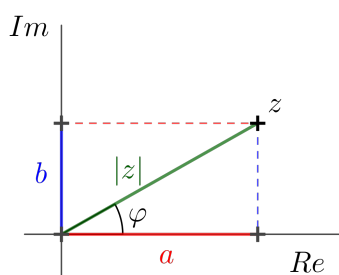


Komplexní čísla

Gaussova rovina, algebraický tvar (reálná a imaginární část, imaginární jednotka), komplexní jednotka, číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, exponenciální a goniometrický tvar (argument komplexního čísla), Moivreova věta



algebraický tvar $z = a + ib$
 goniometrický tvar $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 exponenciální tvar $z = |z|e^{i\varphi}$
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\bar{z} = a - ib$
 $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$, $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$

1) Určete goniometrický tvar komplexního čísla:

- a) $e^{i\frac{\pi}{8}}$
- b) $\frac{1}{2}e^{i\frac{17}{6}\pi}$
- c) $2\sqrt{3} + 2i$

Řešení:

- a) Argument komplexního čísla $\varphi = \frac{\pi}{8}$, absolutní hodnota $|z| = 1 \Rightarrow z = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$
- b) Argument komplexního čísla z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je $\varphi = \frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{5}{6}\pi$, $|z| = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$
- c) Absolutní hodnotu komplexního čísla dopočítáme pomocí reálné a imaginární části k. č.
 $a = 2\sqrt{3}, b = 2, |z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$. Argument určíme z pravoúhlého trojúhelníku o přeponě $|z|$ a odvěsnách a, b ; $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ tedy $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 $\Rightarrow z = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

2) Zapište v exponenciálním tvaru

- a) -5
- b) $1 - i$

Řešení: Pomozte si znázorněním komplexního čísla v Gaussově rovině, určete vzdálenost čísla od počátku (tj. absolutní hodnotu) a argument čísla.

- a) $|z| = 5, \varphi = \pi \Rightarrow z = 5e^{i\pi}$
- b) $|z| = \sqrt{2}, \varphi = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

3) Určete algebraický tvar komplexního čísla

- a) $e^{i\pi}$
- b) $18e^{i\frac{8}{3}\pi}$

Řešení: Pomozte si znázorněním komplexního čísla v Gaussově rovině, popřípadě převed'te čísla nejprve do goniometrického tvaru a vypočítejte hodnoty funkcí sinus a kosinus.

- a) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
- b) $18e^{i\frac{8}{3}\pi} = 18(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = -9 + i9\sqrt{3}$.

4) Zapište v exponenciálním tvaru čísla $\bar{z}$, $-z$, je-li:

a) $z = e^{i\frac{2}{3}\pi}$

b) $z = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$

Řešení: Uvědomte si, že obrazy komplexního čísla z a k němu komplexně sdruženého čísla $\bar{z}$ v Gaussově rovině jsou souměrně sdružené podle reálné osy, je-li φ argument čísla z , můžeme argument $\bar{z}$ zapsat jako $-\varphi$. Obdobně obrazy čísel z a $-z$ souměrně sdružené podle počátku, argument čísla $-z$ je tedy $\varphi + \pi$.

a) $\bar{z} = e^{i\frac{-2}{3}\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$, $-z = e^{i\frac{5}{3}\pi}$

b) $\bar{z} = 2e^{i\frac{-4}{3}\pi} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$, $-z = 2e^{i\frac{7}{3}\pi}$

5) V Gaussově rovině najděte obrazy všech komplexních čísel z , pro něž platí:

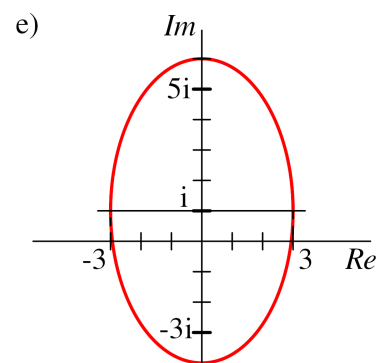
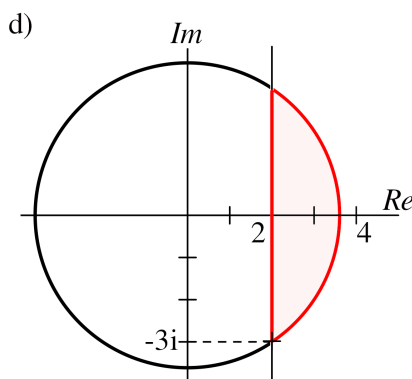
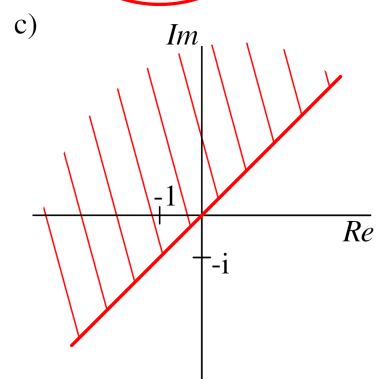
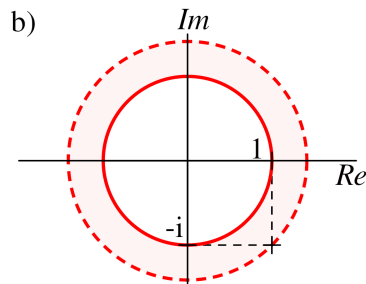
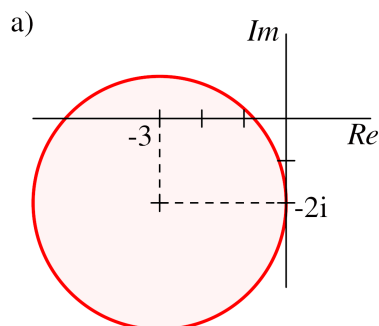
a) $|z + 3 + 2i| \leq 3$

b) $|1 - i| > |z| \geq 1$

c) $|z + i| \geq |z + 1|$

d) $|2 - 3i| \geq |z| \geq |z - 4|$

e) $|z + 3i| + |z - 5i| = 10$

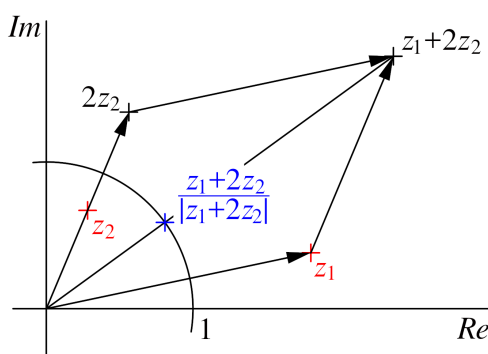


Obrázek 1: Řešení úlohy 5.

Řešení:

- a) Nerovnici upravíme do tvaru $|z - (-3 - 2i)| \leq 3$. Hledáme všechna komplexní čísla, jejichž vzdálenost od bodu $-3 - 2i$ je menší nebo rovna třem. Obrazy těchto čísel v Gaussově rovině vyplní kruh se středem v bodě $-3 - 2i$ o poloměru 3 (viz obrázek).
- b) Hledáme všechna komplexní čísla, jejichž absolutní hodnota, nebo též velikost je větší než 1 a menší než je velikost čísla $1 - i$. Obrazy těchto čísel vyplní oblast mezi soustřednými kružnicemi k resp. l , se středem v počátku a poloměry 1, resp. $\sqrt{2}$, přičemž kružnice k do oblasti patří, kružnice l nikoliv (viz obrázek).
- c) Nerovnici upravíme do tvaru $|z - (-i)| \geq |z - (-1)|$. Hledáme všechna komplexní čísla v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od bodu $-i$ je větší než vzdálenost od bodu -1 . Body, jejichž vzdálenost od dvou různých bodů úsečky je stejná, tvoří osu úsečky. Tato osa rozdělí Gaussovu rovinu na dvě poloroviny, z nichž jedna je řešením zadané úlohy. Sandno nahlédneme, že např. bod -1 nerovnici vyhovuje, řešením je tedy polorovina obsahující tento bod (viz obrázek).
- d) Nerovnici upravíme do tvaru $|2 - 3i| \geq |z - 0| \geq |z - 4|$. Hledáme všechna komplexní čísla v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od počátku je menší než velikost čísla $|2 - 3i|$ a současně je větší než vzdálenost od bodu 4. První podmínku splňují body kruhu o středu v počátku a poloměru $\sqrt{2^2 + 3^2}$, jinými slovy kruhu ohraničeného kružnicí procházející bodem $2 - 3i$; druhou podmínku splňují body poloroviny s hraniční přímkou rovnoběžnou s imaginární osou procházející bodem 2, neobsahující počátek. Řešením úlohy je průnik obou oblastí, tj. kruhová úseč (viz obrázek).
- e) Hledáme všechna komplexní čísla v Gaussově rovině, jejichž součet vzdáleností od bodů $-3i$ a $5i$ je roven 10. Takové body vyplní elipsu s ohnisky v daných bodech, velikost hlavní poloosy je $\frac{10}{2} = 5$, excentricita je poloviční vzdálenost ohnisek, tedy 4, velikost vedlejší poloosy je rovna $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (viz obrázek).
- 6) V Gaussově rovině libovolně zvolte obrazy dvou různých nenulových komplexních čísel z_1, z_2 a sestrojte obraz čísla

$$\frac{z_1 + 2z_2}{|z_1 + 2z_2|}.$$



Obrázek 2: Řešení úlohy 6.

Řešení: Při násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru se Komplexní čísla sčítáme po složkách, v Gaussově rovině si můžeme představit, že sčítáme vektory Oz_1, Oz_2 , kde O je počátek. Vydělíme-li komplexní číslo jeho velikostí, dostaneme komplexní číslo se stejným argumentem o velikosti 1. Hledaný obraz komplexního čísla najdeme tedy ve vzdálenosti 1 od počátku na polopřímce určené počátkem a obrazem bodu $z_1 + 2z_2$ (viz obrázek).

8) Vypočtete v goniometrickém tvaru:

$$\left(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi\right)^{-60}.$$

Řešení: Využijte Moivreovu větu a argument následně upravte do základního tvaru.

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi\right)^{-60} &= \left(\cos\left(-60\frac{3}{5}\pi\right) + i \sin\left(-60\frac{3}{5}\pi\right)\right) = \left(\cos(-36\pi) + i \sin(-36\pi)\right) = \\ &= (\cos 2\pi + i \sin 2\pi). \end{aligned}$$

9) S využitím Moivreovy věty odvoďte vzorce pro $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$.

Řešení: Výraz $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2$ můžeme umocnit pomocí Moivreovy věty, nebo za pomoci vztahu $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a oba výrazy porovnat. Porovnáním reálných a imaginárních částí obou výrazů dostaneme požadované vztahy.

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi &= \cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi + i^2 \sin^2 \varphi \\ \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad \wedge \quad \sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

odmocnina z komplexního čísla, kvadratická rovnice v $\mathbb{C}$, binomická rovnice

10) Určete všechny 4. odmocniny z čísla $a = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

Řešení: Narozdíl od n -té odmocniny z reálného čísla není n -tá odmocnina z komplexního čísla určena jednoznačně; n -tou odmocninou z komplexního čísla a nazýváme každé komplexní číslo b , pro které platí $b^n = a$. Velikost každého takového čísla b je pak n -tou odmocninou velikosti čísla a a argument čísla b je n -tinou hodnoty $\varphi + 2k\pi$, kde φ je argumentem čísla a , $k \in \mathbb{Z}$. Pro různé hodnoty k dostaneme celkem n různých argumentů, lišících se o úhel $2\pi/n$. Obrazy všech komplexních n -tých odmocnin z čísla a tvoří tedy vrcholy pravidelného n -úhelníku se středem v počátku.

$$b_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

11) Řešte binomickou rovnici $8x^3 + 27 = 0$.

Řešení: Rovnice je ekvivalentní s rovnicí $x^3 = -\frac{27}{8}$, hledáme tedy všechny třetí odmocniny z čísla $-\frac{27}{8}$, které lze goniometrickém tvaru zapsat jako $\frac{27}{8}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

12) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

b) $ix^2 + 2x - 5i = 0$

c) $x^2 + (5i - 3)x - 4 - 8i = 0$

d) $(1 - i)x^2 - (5 - i)x + 6 - 4i = 0$

Řešení: Je-li diskriminant kvadratické rovnice komplexní číslo ve tvaru $|D|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, hledané kořeny kvadratické rovnice budou mít tvar

$$\frac{-b \pm \sqrt{|D|}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})}{2a}.$$

Je-li argument komplexního čísla $(2k+1)\pi$, tj. je-li diskriminat záporné reálné číslo, bude $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ a výsledné řešení se zjednoduší $(-b \pm i\sqrt{|D|})/2a$.

a) Spočítáme diskriminant $D = 16 - 20 = -4$. Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

b) Spočítáme diskriminant $D = 4 - 4i(-5i) = -16$. Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2i}.$$

Tedy $x_1 = \frac{-2+4i}{2i} = \frac{-1+2i}{i} = -(-i-2) = 2+i$, $x_2 = \frac{-2-4i}{2i} = \frac{-1-2i}{i} = -(-i+2) = -2+i$.

c) Spočítáme diskriminant a převedeme jej do goniometrického tvaru:

$D = (5i-3)^2 - 4(-4-8i) = 2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{(5i-3) \pm \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{2} = \frac{5i-3 \pm (1+i)}{2}.$$

Tedy $x_1 = 2 - 2i$, $x_2 = 1 - 3i$.

d) Spočítáme diskriminant $D = (5-i)^2 - 4(1-i)(6-4i) = 16 + 30i$, $|D| = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$. Pro argument komplexního čísla D platí $\cos \alpha = \frac{16}{34}$, $\sin \alpha = \frac{30}{34}$. Dále využijeme vzorce pro poloviční argument

$$|\cos \frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{16}{34}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{34}}, |\sin \frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{16}{34}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{34}}.$$

Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{(5-i) \pm \sqrt{34}(\frac{25}{34} + i\frac{9}{34})}{2(1-i)} = \frac{(5-i) \pm (5+3i)}{2(1-i)}.$$

Tedy po úpravě $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 1 - i$.

13) Jaký je geometrický význam komplexních kořenů kvadratické rovnice s reálnými koeficienty? Lze řešení nějak vizualizovat?

Řešení: Představme si graf kvadratické funkce s reálnými koeficienty v rovině x, z , jejíž kořeny jsou komplexní čísla, viz modrá parabola v obrázku 3. Otočme parabolu podle její osy o $+90^\circ$ (oranžová křivka) a poté okolo vrcholové tečny otočené paraboly o $+180^\circ$. Průsečíky výsledné paraboly (červená křivka) s rovinou x, y jsou hledané kořeny v Gaussově rovině, reprezentované rovinou x, y . Více najdete např. v prezentaci *Finding complex root of quadratic equation from graph*, odkaz najdete níže v literatuře.

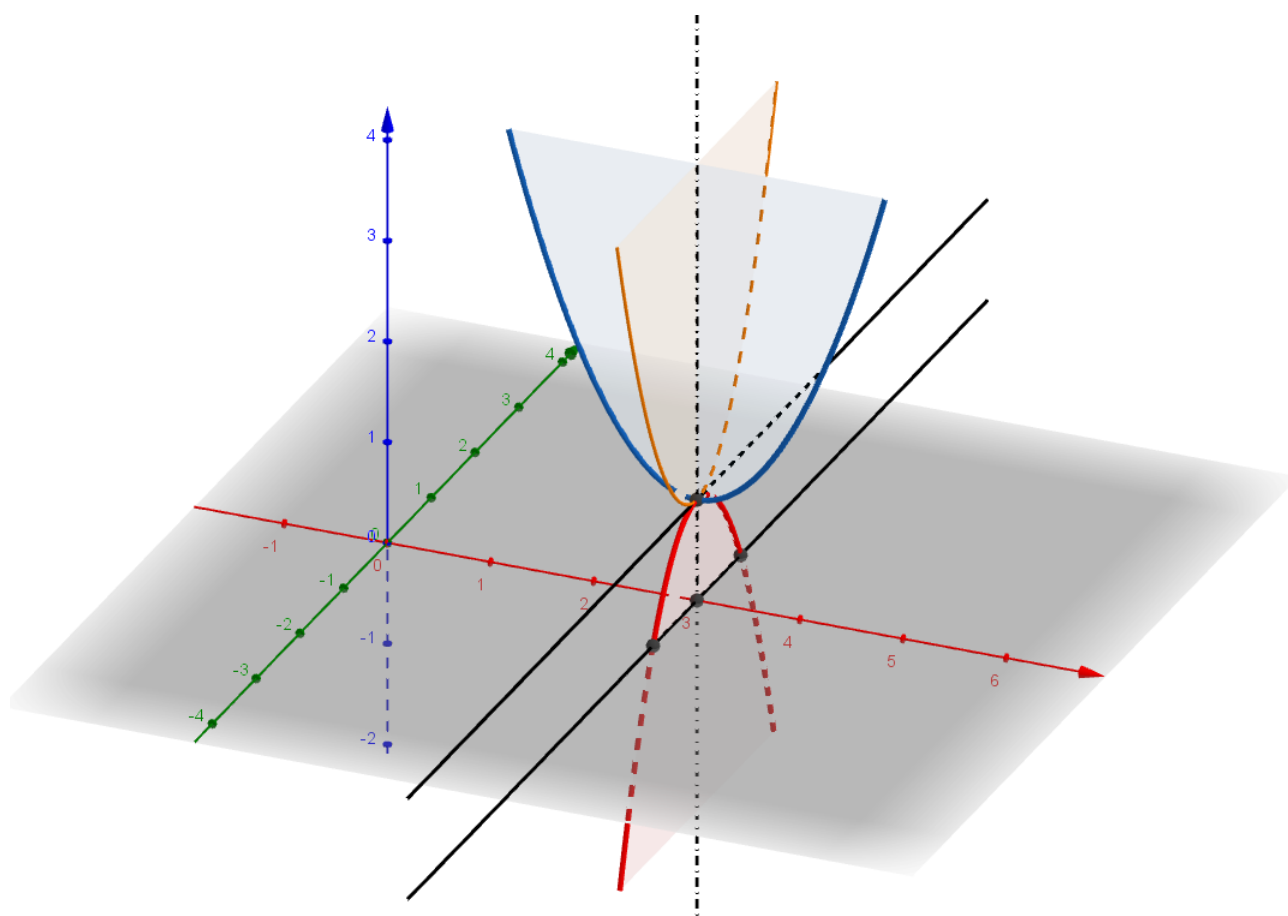
Literatura

Petáková, J. (2021). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

Robová, J. et al. (2013). *Matematika pro střední školy: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Prometheus, Praha.

Calda, E. (1994). *Matematika pro gymnázia. Komplexní čísla*. Prometheus, Praha.

Finding complex root of quadratic equation from graph, <https://www.youtube.com/watch?v=i0YkkVrew54>



Obrázek 3: Řešení úlohy 13