

Důkazy – řešené úlohy

výrok, logické spojky, kvantifikátory, negace výroku, tabulka pravdivostních hodnot

důkaz, přímý důkaz, nepřímý důkaz obměněnou implikací, (nepřímý) důkaz sporem, matematická indukce

- 1) Dokažte přímým důkazem Sinovou větu.

Řešení: Sinová věta: V trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c a protilehlými úhly o velikostech α, β, γ platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Důkaz je třeba provést zvlášť pro ostroúhlý, pravoúhlý a tupouhlý trojúhelník. V ostroúhlém trojúhelníku sestrojíme výšku v_c z vrcholu C na protější stranu, patu výšky označme P . Pro velikosti úhlů α, β u vrcholů A, B v trojúhelnících APC, BPC platí: $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}, \sin \beta = \frac{v_c}{a}$. Porovnáním hodnot v_c v obou výrazech dostáváme $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$. Obdobně bychom odvodili $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ apod. V pravoúhlém trojúhelníku není co dokazovat, neboť sinová věta přechází v definitorní vztahy pro sinus jednotlivých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku. V tupouhlém trojúhelníku, je-li tupý úhel např. při vrcholu B , budeme při stejném postupu, jako u ostroúhlého trojúhelníku pracovat s hodnotou $\sin(180^\circ - \beta)$, což je ovšem totéž jako $\sin \beta$, dojdeme tedy ke stejnému výsledku.

- 2) Dokažte přímým důkazem větu: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ platí $\left(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$.

Řešení: Vyjdeme od zadaného výroku a pokusíme se z něj pomocí ekvivalentních úprav odvodit jiné tvrzení o němž víme, že je pravdivé. Samotný důkaz by pak postupoval v opačném pořadí. Protože a i b jsou kladná čísla, bude umocnění nerovnosti ekvivalentní úpravou, dojdeme tak k nerovnosti $(a+b)^2 \geq 4ab$. Umocněním výrazu na levé straně a následnou úpravou dojdeme k nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$, což určitě $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ platí.

- 3) Nepřímým důkazem dokažte větu: $a \in \mathbb{N}$ Pokud a^2 je dělitelné třemi, pak i a je dělitelné třemi.

Řešení: Dokážeme obměněnou implikaci $(\neg A \Rightarrow \neg B)$: Pokud přirozené číslo a není dělitelné třemi, pak ani a^2 není dělitelné třemi.

Přirozené číslo a , které není dělitelné třemi lze zapsat jako $a = 3k + 1$ nebo $a = 3k + 2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Oba výrazy umocníme na druhou, v prvním případě dostáváme $a^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, ve druhém $a^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. V obou případech dostáváme při dělení třemi zbytek 1, tedy a^2 není dělitelné třemi.

- 4) Dokažte sporem větu: Pro všechna kladná reálná čísla a, b platí $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Řešení: Budeme se snažit z negace původní věty odvodit nepravdivé tvrzení. Nejprve tedy větu znegujeme:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2.$$

Protože a i b jsou kladná reálná čísla, můžeme nerovnici vynásobit ab a následně upravit do tvaru $(a-b)^2 < 0$. Žádná kladná reálná čísla a, b však této nerovnici nevyhovují, dospěli jsme tedy ke sporu, negace výroku je nepravdivá, platí tedy původní tvrzení.

5) Dokažte sporem, že číslo $\sqrt{3}$ je iracionální.

Řešení: Předpokládejme, že číslo $\sqrt{3}$ je racionální, lze jej tedy zapsat následovně:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge NSD(p, q) = 1.$$

Rovnost $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ umocníme a upravíme do tvaru $3q^2 = p^2$, odkud vidíme, že číslo 3 dělí p^2 a dle příkladu 3) tedy číslo 3 dělí p , lze tedy psát $p = 3k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Platí tedy $3q^2 = (3k)^2$, neboli $q^2 = 3k^2$, odkud opět vidíme, že číslo 3 dělí q^2 a tedy i q , což je ve sporu s předpokladem, že čísla p, q jsou nesoudělná ($NSD(p, q) = 1$).

6) Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních n lichých (myšleno kladných) čísel je roven n^2 .

Řešení: Chceme dokázat: $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

a) Tvzení nejprve dokážeme pro nejmenší číslo z množiny $\mathbb{N}$. Pro $n = 1$ tvrzení platí, dostáváme rovnost $1 = 1^2$.

b) Dokážeme, že z platnosti zkoumaného tvrzení pro n (ozančme $V(n)$) vyplývá platnost daného tvrzení pro $n + 1$ ($V(n + 1)$).

$$V(n + 1) : \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Dle indukčního předpokladu lze výraz $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ nahradit výrazem n^2 a levou stranu $V(n + 1)$ upravit do tvaru $n^2 + (2n + 1)$, což po jednoduché úpravě dá $(n + 1)^2$. Z platnosti $V(n)$ plyne tedy platnost $V(n + 1)$, což spolu s platností $V(1)$ dává platnost tvrzení $V(n)$ pro všechna přirozená čísla.

7) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí: Číslo $(10^{2n+1} + 1)$ je dělitelné 11.

Řešení:

a) Pro $n = 0$ (nejmenší číslo množiny $\mathbb{N}_0$) dostáváme $10^{2n+1} + 1 = 11$, což je číslo dělitelné 11.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž $V(n + 1)$: Číslo $(10^{2n+3} + 1)$ je dělitelné 11.

Toho dosáhneme upravením výrazu $10^{2n+3} + 1$ za současného využití indukčního předpokladu v podobě dosazení výrazu $11k$ (kde $k \in \mathbb{N}$) za $10^{2n+1} + 1$:

$$10^{2n+3} + 1 = 10^2 \cdot 10^{2n+1} + 1 = 10^2 \cdot (10^{2n+1} + 1 - 1) + 1 = 10^2(11k - 1) + 1 = 10^2 \cdot 11k - 99 = 11(100k - 9).$$

Implikace je tedy pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

Poznámka: V tomto i následujících příkladech je aplikace indukčního předpokladu vždy zvýrazněna podtržením.

8) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Řešení:

a) Pro $n = 1$ dostáváme $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, což platí.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž $V(n + 1)$: $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\underline{1 + 2 + \dots + n} + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

9) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Řešení:

a) Pro $n = 1$ dostáváme $1^2 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1)$, tedy $1 = 1$.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž

$$V(n+1) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2}{\frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2}{\frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]} = \frac{\frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

10) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Řešení:

a) Pro $n = 1$ dostáváme $1 \cdot 2 = \frac{1}{3}1(1+1)(1+2)$, což platí.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž

$$V(n+1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + (n+1)(n+2)}{= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)}{= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

11) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Řešení:

a) Pro $n = 1$ dostáváme $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2+1}$, což platí.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž

$$V(n+1) : \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\frac{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}}{\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}} = \frac{\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}}{\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}} = \frac{n+1}{(2n+3)}.$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

12) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $10^n - 4$ dělitelné šesti.

Řešení:

a) Pro $n = 1$ dostáváme $10^1 - 4 = 6$, což je číslo dělitelné 6.

b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž $V(n+1)$: Číslo $(10^{n+1} - 4)$ je dělitelné 6. Toho dosáhneme upravením výrazu $10^{n+1} - 4$ za současného využití indukčního předpokladu v podobě dosazení výrazu $6k$ (kde $k \in \mathbb{N}$) za $10^n - 4$:

$$10^{n+1} - 4 = 10 \cdot (10^n - 4 + 4) - 4 = 10 \cdot (6k + 4) - 4 = 6 \cdot 10k + 40 - 4 = 6(10k + 6).$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

- 13) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ platí $\sum_{i=0}^n i!i = (n+1)! - 1$.

Řešení:

- a) Pro $n = 0$ dostáváme na levé straně $\sum_{i=0}^0 i!i = 0!0 = 0$, na pravé straně rovnosti bude $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$, tedy levá strana je rovna pravé.
 b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž

$$V(n+1) : \forall n \in \mathbb{Z}_0^+ : \sum_{i=0}^{n+1} i!i = (n+2)! - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i!i = \sum_{i=0}^n i!i + (n+1)!(n+1) = (n+1)! - 1 + (n+1)!(n+1) = (n+2)! - 1.$$

Implikace je tedy pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

- 14) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in \langle -1, \infty \rangle$ platí: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Řešení:

- a) Pro $n = 1$ dostáváme $(1+x)^1 \geq 1+x$, což pro všechna $x \in \langle -1, \infty \rangle$ platí.
 b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž

$$V(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x$.
 V předposledním kroku jsme výraz nx^2 zanedbali, neboť je vždy ≥ 0 a jeho vynecháním se nerovnost nezkaží. Platí tedy $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

- 15) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^n > n$. Zformulujte obdobné tvrzení týkající se nerovnosti $2^n > n^2$ a dokažte jej.

Řešení: Dokažme nejprve tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^n > n$.

- a) Pro $n = 1$ dostáváme pravdivé tvrzení $2 > 1$.
 b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, kde $V(n+1)$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^{n+1} > n+1$.
 Postupně upravujeme levou stranu nerovnice a ve vhodné chvíli využijme indukční předpoklad: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n \geq n+1$, kde poslení úprava platí $\forall n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $2^{n+1} > n+1$, implikace je pravdivá, platí i původní dokazované tvrzení.

Zformulujme a dokážeme obdobné tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$: $2^n > n^2$.

- a) Zkusíme ověřit tvrzení pro nejmenší přirozené číslo $n = 1$, dostáváme pravdivé tvrzení $2 > 1$. Ale pozor, kdybychom šli dál, pro $n = 2$ dostaneme $4 > 4$, pro $n = 3$ dostaneme $8 > 9$, atd. Tento problém bychom mohli přehlédnout, ale v některém kroku dokazování implikace by se k nám měl vrátit.
 b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, kde $V(n+1)$: $2^{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
 Postupně upravujeme levou stranu nerovnice a ve vhodné chvíli využijme indukční předpoklad: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 = (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) \geq (n+1)^2$, kde výraz $(n^2 - 2n - 1)$ je větší nebo roven nule $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a pro tato n jej lze tedy vynechat, aniž bychom pokazili nerovnost. Vraťme se zpět na začátek. Implikace je pravdivá pro $n \geq 3$, ale $V(3)$ neplatí. Pro $n = 4$ tvrzení stále neplatí, dostáváme $16 > 16$, ale pro $n = 5$ tvrzení již platí, dostáváme $32 > 25$. Tvrzení lze tedy zformulovat ve tvaru: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$: $2^n > n^2$.

- 16) Dokažte Moivreovu větu: $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.

Řešení:

- a) Pro $n = 1$ dostáváme $\cos x + i \sin x = \cos x + i \sin x$.
 b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, kde $V(n+1)$: $(\cos x + i \sin x)^{n+1} = \cos(n+1)x + i \sin(n+1)x$.
 Za pomoci součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus upravíme pravou stranu:

$$\begin{aligned} \cos(nx + x) + i \sin(nx + x) &= \cos nx \cos x - \sin nx \sin x + i(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = \\ &= \cos x(\cos nx + i \sin nx) + i \sin x(\cos nx + i \sin nx) = \underline{(\cos nx + i \sin nx)}(\cos x + i \sin x) = \\ &= (\cos x + i \sin x)^n(\cos x + i \sin x) = (\cos x + i \sin x)^{n+1}. \end{aligned}$$

Implikace je tedy pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

- 17) Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení:

Tvrzení: Všechna reálná čísla se navzájem rovnají.

Důkaz: Zapišme tvrzení nejprve formálně jako výrok:

$V(n) =$ „Pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí $x_1 = \dots = x_n$.“

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ triviálně platí. Pokud $n \in \mathbb{N}$, předpokládejme, že $V(n)$ platí a že $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou libovolná reálná čísla. Podle indukčního předpokladu se libovolná n -tice reálných čísel navzájem rovná, platí tedy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, ale také $x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$. Pak ale $x_1 = \dots = x_{n+1}$, tedy výrok $V(n+1)$ platí. Všechna reálná čísla jsou si tedy rovna.

Řešení: Implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ platí $\forall n \geq 2$, ale neplatí pro $n = 1$, což stačí k tomu, aby neplatil celý důkaz.

Literatura

Habada, P. (2012), *Indukce a rekurze*,

<https://math.fel.cvut.cz/cz/lide/habala/teaching/dma/odmknih05.pdf>