

Množiny – řešené úlohy

množina (konečná/nekonečná), prvek množiny, mohutnost množiny, zápis množiny, rovnost množin

1) Zapište dané množiny výčtem prvků a jsou-li konečné, určete jejich mohutnost:

- a) $A = \{a \in \mathbb{N}; |a| = 5\}$
- b) $B = \{a \in \mathbb{Z}; |a| = 5\}$
- c) $C = \{n \in \mathbb{N}; n|24\}$
- d) $D = \{n \in \mathbb{N}; n|24 \wedge n > 10\}$
- e) $E = \{n \in \mathbb{N}; n|24 \wedge n|15\}$
- f) $F = \{n \in \mathbb{N}; n < 10 \wedge n \geq 8\}$
- g) $G = \{n \in \mathbb{N}; n < 3 \Rightarrow n|6\}$
- h) $H = \{h \in \mathbb{Z}; \sqrt[3]{h} < 2 \Leftrightarrow (7 \leq h \leq 10 \vee h > 12)\}$

Řešení:

- a) $A = \{5\}$, $|A| = 1$.
- b) $B = \{-5; 5\}$, $|B| = 2$.
- c) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$, $|C| = 8$.
- d) $D = \{12; 24\}$, $|D| = 2$.
- e) $E = \{1; 3\}$, $|E| = 2$.
- f) $F = \{8; 9\}$, $|F| = 2$.
- g) $G = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\} = \mathbb{N}$, množina není konečná (ale je spočetná).
- h) $H = \{7; 8; 11; 12\}$, $|H| = 4$.

2) Pro jaké $x \in \mathbb{Z}$ obsahuje interval $A = \langle x; 3x - 2 \rangle$ právě 9 přirozených čísel?

Řešení: Jelikož $x \in \mathbb{Z}$, budou krajními hodnotami intervalu celá čísla. Aby intervalu náleželo právě devět celých čísel, musí být rozdíl krajních hodnot roven 8, tj. řešíme rovnici $3x - 2 - x = 8$. Řešením je $x = 5$, tedy $A = \langle 5; 13 \rangle$. Připustíme-li, že v zápisu daného intervalu nemusí být vlevo menší číslo (což je však neobvyklé), uvažujeme absolutní hodnotu rozdílu rovnou 8. Potom by úloha měla ještě druhé řešení: $\langle -3; -11 \rangle$, resp. raději psáno jako $\langle -11; -3 \rangle$.

3) Zapište výčtem množinu $M = \{x \in \mathbb{N}; (x < 15) \wedge [(x \bmod 3 < 2) \Rightarrow 2|x]\}$.

Řešení: Podmínku $x < 15$ splňují přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Z nich je třeba vybrat ta, která splňují i podmínku $(x \bmod 3 < 2) \Rightarrow 2|x]$. Výsledky výpočtu $x \bmod 3$ mohou nabývat hodnot 0, 1, 2. Nabývají-li hodnot 2, potom první část implikace není splněna, a tedy celá implikace je automaticky pravdivá. Taková x budou v množině M , jedná se o hodnoty 2, 5, 8, 11 a 14. Ze zbývajících hodnot je třeba vybrat takové, pro něž je pravdivý i výrok $2|x$, tj. hodnoty 4, 6, 10 a 12. Tedy $M = \{2; 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 14\}$.

podmnožina, prázdná množina, potenční množina, operace s množinami

1) Vypište všechny podmnožiny množiny $A = \{a; b; c\}$.

Řešení: Množina A je tříprvková, tedy má $2^3 = 8$ podmnožin. Jsou jimi množiny $\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, $\{a; b; c\}$.

2) Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{b \in \mathbb{R}; b > 3\}$, $C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D = (-5; 3)$. Zapište výčtem nebo intervalem:

- $A \cap D$
- $A \cup D$
- $B \cap D$
- $C \setminus D$
- B'_C
- $A \setminus C$

Řešení: Množinou B je interval $(3; \infty)$.

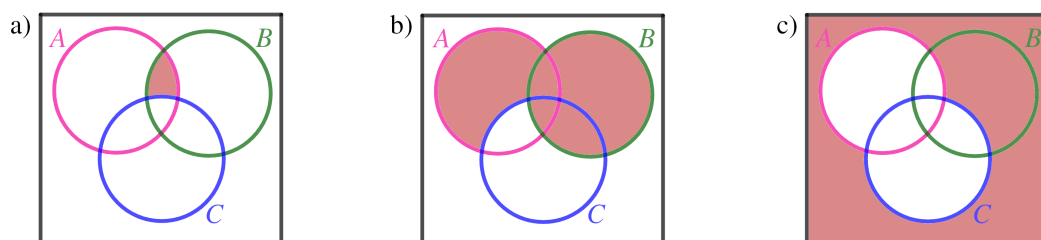
- $\{1; 2; 3\}$.
- $(-5; 3) \cup \{4; 5\}$.
- $\emptyset$.
- $(-\infty; -5) \cup (3; \infty)$.
- $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$.
- $\{1\}$.

Vennovy diagramy

1) Znázorněte pomocí Vennova diagramu:

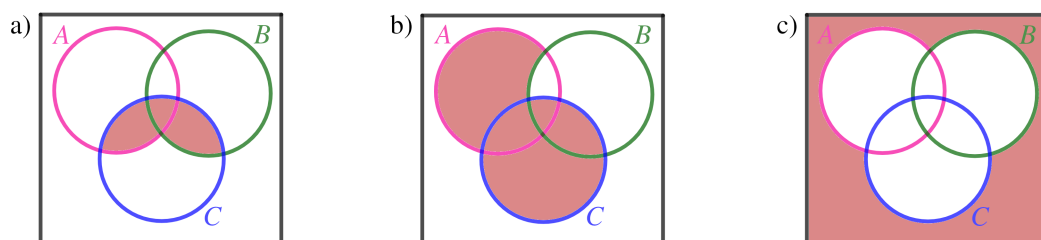
- $(A \cap B) \setminus C$
- $(A \setminus C) \cup B$
- $A' \setminus C$

Řešení: Viz obrázek 1.



Obrázek 1

2) Zapište symbolicky (pomocí operací s množinami A , B , C) vztahy znázorněné Vennovými diagramy na obrázku 2:



Obrázek 2

Řešení:

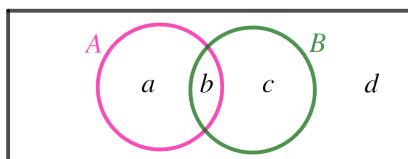
- a) $(A \cup B) \cap C$
- b) $(A \setminus B) \cup C$
- c) $(A \cup B \cup C)'$

- 2) Autosalon prodává automobily několika značek. Za poslední měsíc bylo prodáno celkem 61 vozů. Automobilů vybavených adaptivním tempomatem bylo prodáno třikrát více než automobilů značky Škoda. Automobilů Škoda bez adaptivního tempomatu bylo prodáno o 6 méně než škodovek s tempomatem. Aut bez adaptivního tempomatu jiné značky než Škoda bylo prodáno o 3 více než automobilů Škoda bez tempomatu. Kolik autosalon prodal škodovek? A kolik prodal vozů s adaptivním tempomatem jiné značky než Škoda?

Řešení: Úlohu lze řešit pomocí Vennova diagramu pro 2 množiny. Nechť množina A odpovídá všem prodaným vozům s adaptivním tempomatem a množina B všem prodaným vozům značky Škoda. Označíme-li a počet prodaných vozů jiné značky než Škoda s tempomatem, b počet prodaných vozů Škoda s tempomatem, c počet prodaných vozů Škoda bez tempomatu a d počet ostatních prodaných vozů (obr. 3), potom z textu zadání vyplývá, že platí:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 61 \\ a + b &= 3(b + c) \\ c + 6 &= b \\ d - 3 &= c \end{aligned}$$

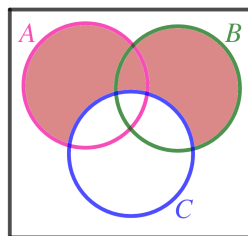
Vyřešením soustavy lineárních rovnic získáme $a = 35$, $b = 11$, $c = 5$ a $d = 8$. Autosalon tedy prodal 16 škodovek ($b + c$) a 37 vozů s tempomatem jiné značky než Škoda.



Obrázek 3

- 3) Zjednodušte zápis $[(A \cup B) \setminus (B \cap C)] \setminus (A \cap C)$.

Řešení: Úlohu lze řešit pomocí Vennova diagramu pro 3 množiny. Zadání odpovídá situace znázorněná na obrázku 4, kterou lze popsat jednodušeji například jako $(A \cup B) \setminus C$.



Obrázek 4

Literatura

<https://karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=title>