

Rovnice s parametrem – řešené úlohy

rovnice, neznámá, parametr, množina řešení

- 1) V oboru reálných čísel řešte rovnici s reálným parametrem a :

$$ax + 3x = a^2 + 2a - 3$$

Řešení:

Obě strany rovnice rozložíme na součin. Cílem je vyjádřit neznámou x za pomoci parametru a (ne naopak - to by sice také šlo, ale byla by to trochu jiná úloha).

$$x(a + 3) = (a + 3)(a - 1)$$

Než rovnici bezhlavě vydělíme výrazem $(a + 3)$, musíme se zamyslet, zda tento výraz nemůže být nulový a tuto situaci vyšetřit zvlášť.

Pro $a = -3$ dostáváme rovnici ve tvaru $x \cdot 0 = 0$ a ta je splněna pro všechna reálná x . Pro tento parametr má tedy rovnice nekonečně mnoho řešení.

Pro $a \neq -3$ můžeme rovnici výrazem $(a + 3)$ vydělit a dostáváme $x = a - 1$. V tomto případě má tedy rovnice jediné řešení.

- 2) Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y , pro něž platí

$$\frac{1}{p+x} + \frac{1}{p+y} + 5 = \frac{1+5p}{p},$$

kde p je dané prvočíslo.

Řešení:

Pro $x \neq -p, y \neq -p, p \neq 0$ můžeme rovnici vynásobit výrazem $(x+p)(y+p)p$ a poté upravit:

$$p(p+y) + p(p+x) = (p+y)(p+x)$$

$$p^2 = xy$$

Má-li být p prvočíslo a $x, y \in \mathbb{N}$, připadají v úvahu pouze tři možná řešení:

$$x_1 = 1, y_1 = p^2; x_2 = p^2, y_2 = 1; x_3 = p, y_3 = p.$$

- 3) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$2|x| - p = \frac{2|x| - 1}{p}$$

s neznámou x a s nenulovým reálným parametrem p .

Řešení:

Pro $p \neq 0$ můžeme rovnici vynásobit p a poté upravit:

$$2p|x| - p^2 = 2|x| - 1$$

$$2|x|(p-1) = p^2 - 1$$

Pro $p = 1$ má rovnice tvar $2|x| \cdot 0 = 0$ a je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro $p \neq 1$ lze rovnici vydělit výrazem $p - 1$ a dostaneme:

$$2|x| = \frac{(p-1)(p+1)}{p-1} = p+1$$

$$|x| = \frac{(p+1)}{2}$$

Protože absolutní hodnota z libovolného čísla je vždy ≥ 0 , musí i pravá strana rovnice splňovat:

$$\frac{(p+1)}{2} \geq 0$$

To nastane pro všechna $p \geq -1$.

Shrnutí výsledků:

- pro $p = 1$ rovnici vyhovuje každé $x \in \mathbb{R}$,
- pro $p > -1$ a současně $p \neq 0, 1$ má rovnice 2 řešení $x = \pm \frac{(p+1)}{2}$,
- pro $p = -1$ má rovnice jedno řešení $x = 0$,
- pro $p = 0$ rovnice nemá smysl, tedy ani řešení.

4) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x+p} = x + \sqrt{p},$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

Nejprve stanovme podmínky, první dvě vyplývají z definičního oboru druhé odmocniny a přetí z toho, že výraz na levé straně rovnice je vždy ≥ 0 :

- $p \geq 0$
- $x + p \geq 0$
- $x + \sqrt{p} \geq 0$

Umocníme rovnici na druhou:

$$x + p = x^2 + 2x\sqrt{p} + p$$

$$x^2 + x(2\sqrt{p} - 1) = 0$$

$$x(x + 2\sqrt{p} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 - 2\sqrt{p}$$

Je zřejmé, že $x = 0$ je kořenem rovnice pro každé $p \geq 0$.

Aby $x_2 = 1 - 2\sqrt{p}$ bylo kořenem rovnice, musí být splněny i podmínky b) a c):

$$b) 1 - 2\sqrt{p} + p \geq 0 \Rightarrow (1 - \sqrt{p})^2 \geq 0, \text{ což je splněno } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c) 1 - 2\sqrt{p} + \sqrt{p} \geq 0 \Rightarrow (1 - \sqrt{p}) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \sqrt{p} \Rightarrow p \in \langle 0, 1 \rangle$$

Shrnutí výsledků:

- Tedy pro $p \in \langle 0, 1 \rangle$ má rovnice dva kořeny $x_1 = 0, x_2 = 1 - 2\sqrt{p}$.
- Pro $p \in (1, \infty)$ má rovnice jeden kořen $x = 0$.

- Pro $p = 0$ rovnice nemá smysl.

5) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x^2}{2x-1} = p$$

s neznámou x a s nenulovým reálným parametrem p .

Řešení:

Pro $x \neq \frac{1}{2}$ je rovnice ekvivalentní a rovnici:

$$x^2 = p(2x - 1)$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 2px + p = 0$$

Diskriminant této rovnice má hodnotu $4p(p-1)$ a tedy

- rovnice má 2 řešení pro $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2 - p}}{2} = p \pm \sqrt{p^2 - p}.$$

- pro $p = 0$ rovnice nemá smysl, již v zadání je vyloučena
- pro $p = 1$ má rovnice 1 kořen $x = 1$
- pro $p \in (0, 1)$ rovnice nemá v $\mathbb{R}$ řešení

Ještě je třeba ověřit, že nalezená řešení splňují podmínku $x \neq \frac{1}{2}$. Tedy:

$$p \pm \sqrt{p^2 - p} = \frac{1}{2}$$

$$\pm \sqrt{p^2 - p} = \frac{1}{2} - p \quad /^2$$

$$|p^2 - p| = \frac{1}{4} - p + p^2$$

Pro $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ je vnitřek absolutní hodnoty vždy kladný, při odstranění absolutní hodnoty bychom tedy dospěli k rovnici $0 = \frac{1}{4}$, která není splněna pro žádné p , tedy rovnice má všechna výše uvedená řešení.

soustava lineárních rovnic s parametrem, grafické řešení soustavy rovnic, rovnoběžné přímky = žádné řešení, různoběžné přímky = právě jedno řešení, totožné přímky = nekonečně mnoho řešení (body ležící na přímce)

Vizualizace následujících pěti úloh v softwaru GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/m/g9mr9k7e>

6) V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$x - y = 2,$$

$$px + y = 4.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- a) Soustava má právě jedno řešení pro každé $p \neq -1$.
- b) Pro $p = 2$ soustava nemá řešení.
- c) Pro každé $p > 1$ splňuje řešení (x, y) podmínky $x \geq 0, y \leq 0$.
- d) Soustava má právě jedno řešení pro každé $p \in \mathbb{R}$.
- e) Pro $p = 0$ existuje řešení splňující podmínky $x \geq 0, y \geq 0$.

Řešení:

Abychom mohli odpovědět na otázky ze zadání, musíme nejprve vyřešit soustavu. Obě rovnice nejprve sečteme a poté na levé straně vytkneme x :

$$x + px = 6$$

$$x(1 + p) = 6$$

Pro $p = -1$ dostaneme rovnici $x \cdot 0 = 6$, což není splněno pro žádné x .

Pro $p \neq -1$ můžeme celou rovnici vydělit výrazem $(1 + p)$ a dostaneme $x = \frac{6}{1 + p}$, po dosazení např. do první z obou rovnic dopočítáme $y = \frac{4 - 2p}{1 + p}$. Pro $p \neq -1$ má tedy soustava právě jedno řešení.

Výsledky shrneme do tabulky:

hodnota parametru	řešení soustavy
-1	$\emptyset$
$\mathbb{R} - \{-1\}$	$\left[\frac{6}{1 + p}, \frac{4 - 2p}{1 + p} \right]$

Pravdivá jsou tvrzení a), e).

7) V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$x + py = 1$$

$$px + 2y = p.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $|p| \neq 1$.
- b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné $|p| > \sqrt{2}$.

- c) Pro každé řešení (x, y) platí $x = y$.
 d) Pro $p = -1$ nemá soustava řešení.
 e) Pro $p = 1$ existuje řešení (x, y) splňující $x \geq 0, y \leq 0$.

Řešení:

První rovnici vynásobíme $-p$ a přičteme ke druhé, poté na levé straně rovnice vytkneme y :

$$-p^2y + 2y = 0$$

$$y(2 - p^2) = 0$$

Závorka na levé straně rovnice je nulová pro $p = \pm\sqrt{2}$. Pro obě tyto hodnoty dojdeme k rovnici $y \cdot 0 = 0$, která je splněna pro každé reálné y . Hodnotu x dopočítáme např. z první rovnice $x = 1 - py$. Soustava má tedy pro $p = \pm\sqrt{2}$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[1 - py, y]$, kde $y \in \mathbb{R}$.

Je-li výraz $(2 - p^2)$ různý od nuly, můžeme jím celou rovnici vydělit a dostáváme $y = 0$ a po dosazení např. do první rovnice ze zadání dopočítáme $x = 1$. Soustava má tedy v tomto případě právě jedno řešení $[0, 1]$ nezávislé na hodnotě parametru p .

Výsledky shrneme do tabulky:

hodnota parametru	řešení soustavy
$\sqrt{2}$	$[1 - \sqrt{2} \cdot y, y], y \in \mathbb{R}$
$-\sqrt{2}$	$[1 + \sqrt{2} \cdot y, y], y \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$	$[1, 0]$

Pravdivá jsou tvrzení b), e).

- 8) V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem t :

$$x + ty = 1,$$

$$x + 2y = t.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $|t| \neq 2$.
 b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.
 c) Pro $t = 1$ každé řešení (x, y) splňuje nerovnosti $x \geq 0, y \geq 0$.
 d) Pro $t = \frac{1}{2}$ nemá soustava řešení.
 e) Pro $t = \frac{1}{2}$ existuje řešení (x, y) splňující $x \geq 0, y \geq 0$.

Řešení:

Od první rovnice odečteme druhou a poté na levé straně vytkneme y :

$$ty - 2y = 1 - t$$

$$y(t - 2) = 1 - t$$

Pro $t = 2$ dostáváme rovnici $y \cdot 0 = -1$, která není splněna pro žádné y . Pro tuto hodnotu parametru tedy soustava nemá řešení.

Pro $t \neq 2$ můžeme výrazem $(t - 2)$ celou rovnici vydělit, dostáváme $y = \frac{1 - t}{t - 2}$, po dosazení do libovolné z rovnic pak dopočítáme $x = \frac{t^2 - 2}{t - 2}$. Pro tyto hodnoty parametru má soustava právě jedno řešení.

Výsledky shrneme do tabulky:

hodnota parametru	řešení soustavy
2	$\emptyset$
$\mathbb{R} - \{2\}$	$\left[\frac{t^2 - 2}{t - 2}, \frac{1 - t}{t - 2} \right]$

Pravdivá jsou tvrzení a), c).

9) Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y s reálným parametrem p :

$$px + y = 2p + 1,$$

$$x + py = 1$$

Určete, pro která $p \in \mathbb{R}$ této soustavě vyhovuje právě jedna dvojice kladných čísel x, y .

Řešení:

Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice, dále upravíme tak, aby na jedné straně rovnice zůstaly pouze členy s y a to poté vytkneme:

$$p - p^2y + y = 2p + 1$$

$$y(1 - p^2) = p + 1$$

Výraz $(1 - p^2)$ je roven nule pro $p = \pm 1$.

Pro $p = 1$ má rovnice tvar $y \cdot 0 = 2$, řešením není žádné reálné číslo y .

Pro $p = -1$ má rovnice tvar $y \cdot 0 = 0$ a řešením jsou všechna $y \in \mathbb{R}$. Např. ze druhé rovnice ze zadání úlohy pak dopočítáme $x = 1 + y$.

Pro $p \neq \pm 1$ mžeme celou rovnici výrazem $(1 - p^2)$ vydělit a dostáváme $y = \frac{1}{1 - p}$. A opět například ze druhé rovnice ze zadání dopočítáme $x = \frac{1 - 2p}{1 - p}$.

hodnota parametru	řešení soustavy
1	$\emptyset$
-1	$[1 + y, y], y \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R} - \{\pm 1\}$	$\left[\frac{1 - 2p}{1 - p}, \frac{1}{1 - p} \right]$

Zbývá rozhodnout, pro která $p \in \mathbb{R}$ soustavě vyhovuje právě jedna dvojice kladných čísel x, y , tj. pro která p platí:

$$\frac{1}{1 - p} > 0 \wedge \frac{1 - 2p}{1 - p} > 0$$

Z první nerovnice plyne $1 - p > 0$, tedy jmenovatel zlomku ve druhé nerovnici je kladný, kladný musí být i číselník, tj. $1 - 2p > 0$.

$$1 - p > 0 \rightarrow p < 1$$

$$1 - 2p > 0 \rightarrow p < \frac{1}{2}$$

Musí tedy být $p < \frac{1}{2}$ a $p \neq \pm 1$, protože hledáme případy, kdy má soustava právě jedno řešení.

$$p \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2})$$

10) Je dána soustava dvou rovnic

$$2px + 3y = 1,$$

$$px + (1 - 3p)y = -1,$$

s reálným parametrem p . Určete všechny hodnoty, pro něž je řešením soustavy dvojice kladných čísel x, y .

Řešení:

Z první rovnice vyjádříme $y = \frac{1 - 2px}{3}$ a dosadíme do druhé rovnice a dále upravujeme:

$$px + (1 - 3p) \cdot \frac{1 - 2px}{3} = -1 \quad / \cdot 3$$

$$3px + 1 - 2px - 3p + 6p^2x = -3$$

$$px + 6p^2x - 3p + 4 = 0$$

$$x \cdot p \cdot (1 + 6p) = 3p - 4$$

Výraz $p \cdot (1 + 6p)$ je nulový pro $p = 0, p = -\frac{1}{6}$.

Pro $p = 0$ dostaneme rovnici $x \cdot 0 = -4$, která není splněna pro žádné reálné x .

Pro $p = -\frac{1}{6}$ dostaneme rovnici $x \cdot 0 = -\frac{9}{2}$, která není splněna pro žádné reálné x .

Pro $p \neq 0, -\frac{1}{6}$ můžeme rovnici výrazem $p \cdot (1 + 6p)$ vydělit a dostaneme $x = \frac{3p - 4}{p \cdot (1 + 6p)}$.

Dosazením např. do první rovnice ze zadání dostáváme $y = \frac{3}{6p + 1}$.

hodnota parametru	řešení soustavy
0	$\emptyset$
$-\frac{1}{6}$	$\emptyset$
$\mathbb{R} - \{-\frac{1}{6}, 0\}$	$\left[\frac{3p - 4}{p \cdot (1 + 6p)}, \frac{3}{6p + 1} \right]$

Zbývá rozhodnout, pro která $p \in \mathbb{R}$ je řešením soustavy dvojice kladných čísel x, y , tj. pro která p platí:

$$\frac{3p - 4}{p \cdot (1 + 6p)} > 0 \quad \wedge \quad \frac{3}{6p + 1} > 0$$

Ze druhé nerovnice dostáváme $6p + 1 > 0$, první nerovnici tedy můžeme upravit do tvaru:

$$\frac{3p - 4}{p} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3p - 4)p > 0.$$

Součin $(3p - 4)p$ bude kladný, když bude graf paraboly o rovnici $(3x - 4)x = y$ ležet nad osou x , což nastane pro $p \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$, současně však musí být splněna podmínka ze druhé nerovnosti $6p + 1 > 0$, tj. $p > -\frac{1}{6}$. Řešením zadané úlohy jsou tedy:

$$p \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$$

Literatura

Většina zadání úloh sesbírána z přijímacích zkoušek na MFF UK

Jednodušší řešení úloh na rovnice, nerovnice a soustavy rovnic s parametrem najdete v:

Petránský, J.: Rovnice a nerovnice s parametrem na střední škole, bakalářská práce, MFF UK, 2025.