

Relace a zobrazení – řešené úlohy

kartézský součin (dvou množin), binární relace, doplňková relace, inverzní relace, skládání relací

- 1) Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \emptyset$, $D = \{-1; 0\}$. Vypište všechny prvky kartézských součinů:

- a) $A \times B$
- b) $B \times A$
- c) $B \times D$
- d) $A \times C$

Řešení: Kartézským součinem dvou množin M_1 , M_2 je množina uspořádaných dvojic $(m_1; m_2)$, kde $m_1 \in M_1$ a $m_2 \in M_2$.

- a) $\{(1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4)\}$
- b) $\{(3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$
- c) $\{(3; -1), (3; 0), (4; -1), (4; 0)\}$
- d) $\{\}$

- 2) Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{5; 6; 7; 8\}$. Zapište výčtem relace:

- a) $R_1 = \{(a, b) \in A \times B; a < b - 5\}$
- b) $R_2 = \{(a, b) \in A \times B; b = a^3\}$
- c) $R_3 = \{(a, b) \in A \times B; a \geq 2 \Rightarrow b = 2a\}$

Řešení: Relací rozumíme podmnožinu kartézského součinu, tj. množinu těch uspořádaných dvojic (obecně n -tic pro součin n množin), které splňují stanovené podmínky.

- a) V relaci R_1 leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times B$, které splňují podmínku $a < b - 5$. $R_1 = \{(1; 7), (1; 8), (2; 8)\}$
- b) V relaci R_2 leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times B$, které splňují podmínku $b = a^3$. $R_2 = \{(2; 8)\}$
- c) V relaci R_3 leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times B$, které splňují podmínku $a \geq 2 \Rightarrow b = 2a$. Připomeňme, že implikace je pravdivá, nejen když jsou oba dílčí výroky pravdivé, ale také vždy, když je první dílčí výrok nepravdivý.
 $R_3 = \{(1; 5), (1; 6), (1; 7), (1; 8), (3; 6), (4; 8)\}$

- 3) Je dána relace R na množině $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Znázorněte tuto relaci pomocí šachovnicového grafu a zapište výčtem relace R^{-1} a R' , kde R' je doplňkovou relací do $A \times A$.

- a) $R = \{(a, b) \in A \times A; a < b\}$
- b) $R = \{(a, b) \in A \times A; a^2 = a\}$
- c) $R = \{(a, b) \in A \times A; a^2 = b\}$

Řešení: Relací rozumíme podmnožinu kartézského součinu, tj. množinu těch uspořádaných dvojic (obecně n -tic pro součin n množin), které splňují stanovené podmínky.

- a) V relaci R leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times A$, které splňují podmínku $a < b$. $R = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$, obr. 1 vlevo,
 $R^{-1} = \{(2; 1), (3; 1), (4; 1), (3; 2), (4; 2), (4; 3)\}$,
 $R' = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4)\}$.
- b) V relaci R leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times A$, které splňují podmínku $a^2 = a$. $R = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4)\}$, obr. 1 uprostřed,
 $R^{-1} = \{(1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1)\}$,
 $R' = \{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4)\}$.

- c) V relaci R leží právě ty dvojice $(a; b)$ z kartézského součinu $A \times A$, které splňují podmínku $a^2 = b$. $R = \{(1; 1), (2; 4)\}$, obr. 1 vpravo,
 $R^{-1} = \{(1; 1), (4; 2)\}$,
 $R' = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4)\}$.

a)

4	x	x	x	
3	x	x		
2	x			
1				
	1	2	3	4

b)

4	x			
3	x			
2	x			
1	x			
	1	2	3	4

c)

4		x		
3				
2				
1	x			
	1	2	3	4

Obrázek 1

- 4) Zapište výčetem relaci R na množině $\mathbb{N}_0$. Prvek $(m_1; m_2) \in R$ právě tehdy, když $m_2 = m_1 \bmod 4$.

Řešení: $R = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 0), (5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 0), (9; 1), \dots\}$

- 5) Na množině $M = \{1; 2; 3; 4\}$ jsou dány relace $R = \{(1; 2), (2; 2), (1; 3), (3; 4)\}$ a $S = \{(1; 1), (3; 2), (4; 1)\}$. Zapište výčetem:

- $R \circ R$
- $S \circ S$
- $R \circ S$
- $S \circ R$

Řešení: Připomeňme, že prvek $(a; c)$ náleží relaci $R \circ S$ právě tehdy, existuje-li prvek b takový, že $(a; b) \in S$ a zároveň $(b; c) \in R$.

- $R \circ R = \{(1; 2), (2; 2), (1; 4)\}$
- $S \circ S = \{(4; 1)\}$
- $R \circ S = \{(1; 2), (1; 3), (3; 2), (4; 2), (4; 3)\}$
- $S \circ R = \{(1; 2), (3; 1)\}$

vlastnosti relací, ekvivalence na množině, disjunktní rozklad množiny

Relace R je **reflexivní**, jestliže

Relace R je **antireflexivní**, jestliže

Relace R je **symetrická**, jestliže

Relace R je **slabě antisymetrická**, jestliže

Relace R je **silně antisymetrická**, jestliže

Relace R je **tranzitivní**, jestliže

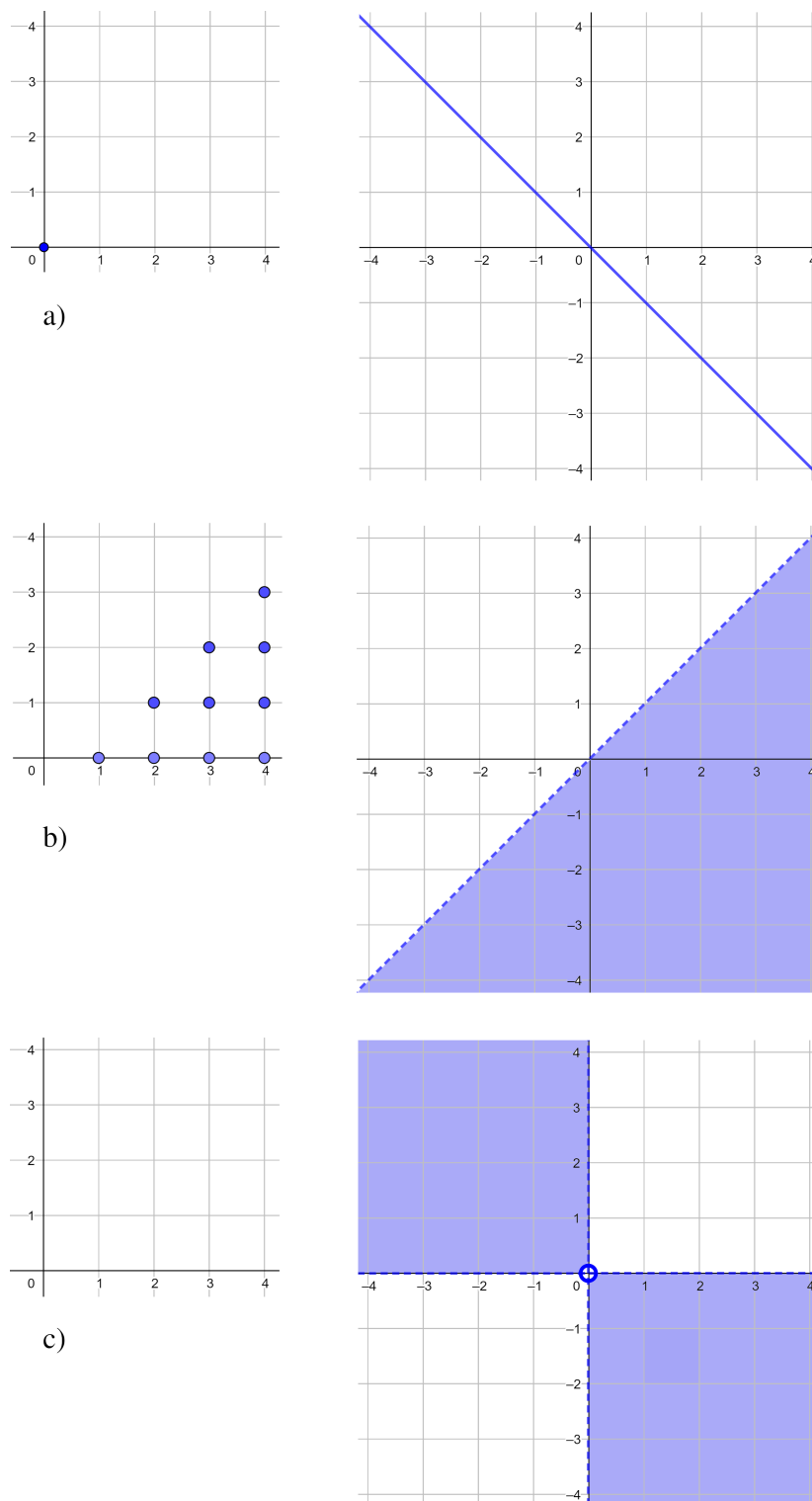
Relace R je **dichotomická**, jestliže

- 1) Určete vlastnosti daných relací nejprve na množině $\mathbb{N}_0$ a poté na množině $\mathbb{R}$. V obou případech relace vhodně graficky znázorněte:

- $(x; y) \in R_1 \Leftrightarrow x = -y$
- $(x; y) \in R_2 \Leftrightarrow x > y$

$$c) (x; y) \in R_3 \Leftrightarrow x \cdot y < 0$$

Řešení: Možná grafická znázornění jsou na obrázku 2, na množině $\mathbb{N}_0$ vlevo, na množině $\mathbb{R}$ vpravo.



Obrázek 2

- a) Na množině $\mathbb{N}_0$ náleží relaci pouze dvojice $(0;0)$. Relace je symetrická, slabě antisymetrická a tranzitivní.
Na množině $\mathbb{R}$ náleží relaci dvojice $(0;0)$ a také každá dvojice navzájem opačných čísel. Relace je symetrická.
- b) Na množině $\mathbb{N}_0$ náleží relaci nekonečně (avšak spočetně) mnoho dvojic čísel, kde první hodnota je větší než druhá. Relace je antireflexivní, silně antisymetrická a tranzitivní.

Na množině $\mathbb{R}$ náleží relaci nekonečně (a nespočetně) mnoho dvojic čísel, kde první hodnota je větší než druhá. Pokud bychom tyto uspořádané dvojice vnímali jako souřadnice bodů roviny s kartézskou soustavou O_{xy} , potom by relaci reprezentovaly body poloroviny s hraniční přímkou $y = x$ bez této hraniční přímky. Relace je antireflexivní, silně antisymetrická a tranzitivní.

- c) Na množině $\mathbb{N}_0$ je relací prázdná množina. Relace je antireflexivní, symetrická, silně (i slabě) antisymetrická a tranzitivní.

Na množině $\mathbb{R}$ náleží relaci nekonečně (a nespočetně) mnoho dvojic čísel. Pokud bychom tyto uspořádané dvojice vnímali jako souřadnice bodů roviny s kartézskou soustavou O_{xy} , potom by relaci reprezentovaly body druhého a čtvrtého kvadrantu bez souřadnicových os. Relace je antireflexivní a symetrická.

- 2) Jsou dány relace R na množině všech lidí. Rozhodněte o každé z nich, zda je reflexivní, antireflexivní, symetrická, slabě/silně antisymetrická, tranzitivní nebo dichotomická.
- $(a, b) \in R$ právě tehdy, když a a b se narodili ve stejný den,
 - $(a, b) \in R$ právě tehdy, když a a b jsou sousedé.

Řešení:

- Relace je reflexivní (každý se narodil v tentýž den jako on sám), symetrická (pokud se osoby a a b narodily v tentýž den, tak se také osoby b a a narodily v tentýž den) a tranzitivní (pokud se osoby a a b narodily v tentýž den a také se v tentýž den narodily osoby b a c , narodily se v tentýž den i osoby a a c).
 - Relace je pouze symetrická (je-li osoba a sousedem osoby b , potom je i osoba b sousedem osoby a a obráceně). Přemýšlejte zejména, proč relace není antireflexivní. Znáte někoho, kdo je majitelem/obyvatelem dvou sousedních domů/bytů?
- 3) Nechť U je množina všech úseček, jejichž krajní body jsou vrcholy daného pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$. Zapište výčtem prvků relaci $R = \{(x, y) \in U \times U; x \perp y\}$ a určete její vlastnosti.

Řešení: Množina U má celkem 15 prvků – 6 stran AB, BC, CD, DE, EF, AF a 9 úhlopříček $AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$. Připomeňme, že úsečky AB a BA jsou totožné a nijak je nerozlišujeme. Ke každé straně jsou kolmé vždy dvě různé úhlopříčky (načrtněte si obrázek). Nesmíme zapomenout, že je-li např. $AB \perp BD$, znamená to také, že $BD \perp AB$. Tedy

$$R = \{(AB; AE), (AE; AB), (AB; BD), (BD; AB), (BC; BF), (BF; BC), (BC; CE), (CE; BC), (CD; AC), (AC; CD), (CD; DF), (DF; CD), (DE; BD), (BD; DE), (DE; AE), (AE; DE), (EF; CE), (CE; EF), (EF; BF), (BF; EF), (AF; DF), (DF; AF), (AF; AC), (AC; AF)\}$$

Relace je antireflexivní a symetrická.

- 4) Zapište všechny disjunktní rozklady množiny $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Řešení: Množinu A je možné rozložit jedním způsobem na čtyři jednoprvkové množiny, třemi způsoby na dvě dvouprvkové množiny a čtyřmi způsoby na jednoprvkovou a tříprvkovou množinu. Za rozklad se považuje i ponechání množiny A v původní podobě (můžeme si představit, že ji sjednotíme s prázdnou množinou). Na pořadí sjednocovaných množin ani na pořadí prvků v jednotlivých množinách nezáleží. Celkem tedy existuje 9 různých disjunktních rozkladů:

$$A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$$

$$A = \{1; 2\} \cup \{3; 4\} = \{1; 3\} \cup \{2; 4\} = \{1; 4\} \cup \{2; 3\}$$

$$A = \{1\} \cup \{2; 3; 4\} = \{2\} \cup \{1; 3; 4\} = \{3\} \cup \{1; 2; 4\} = \{4\} \cup \{1; 2; 3\}$$

$$A = A$$

- 5) Jaké disjunktní rozklady příslušné množiny jsou určeny ekvivalencí:

- a) „rovnost“ na množině $\{-1; 0; 1\}$,
- b) „rovnost absolutních hodnot“ na množině $\{-1; 0; 1\}$?

Řešení:

- a) $\{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$
- b) $\{-1; 1\} \cup \{0\}$