

Výroky – řešené úlohy

výrok (jednoduchý, negace, pravdivostní hodnota, obecný a existenční kvantifikátor)

1) Rozhodněte o každé formulaci, zda je, či není výrokem.

- a) Hlavním městem České republiky je Brno.
- b) $3 < 5$.
- c) Pojďte dál!
- d) Nechť je x celé číslo.
- e) Klaun má červený nos.
- f) Každý klaun má červený nos.

Řešení: Za výrok považujeme takovou oznamovací větu, která podává nějaké tvrzení, o němž má smysl uvažovat, zda je, či není pravdivé. Ne nutně jsme však za daných okolností vždy schopni o pravdivosti rozhodnout.

- a) Je to (nepravdivý) výrok.
- b) Je to (pravdivý) výrok.
- c) Nejedná se o oznamovací větu, není to výrok.
- d) Nejedná se o oznamovací větu, není to výrok.
- e) jedná se sice o oznamovací větu, avšak není dostatečně konkrétní. Není jasné, o jakém klaunovi se v ní píše. Není to výrok.
- f) Tato věta je výrokem, nejsme však schopni rozhodnout o jeho pravdivosti, neboť nevíme, zda má skutečně každý klaun červený nos (nemáme k dispozici statistické údaje o všech klaunech světa).

2) Negujte následující výroky. Vyhněte se však jazykovému obratu „Není pravda, že...“

- a) Hlavním městem České republiky je Brno.
- b) $3 < 5$.
- c) Každý klaun má červený nos.
- d) Dnes je pondělí.

Řešení: Negací výroku je výrok, který vylučuje platnost původního výroku. Má-li původní výrok pravdivostní hodnotu 1, pak negovaný výrok má pravdivostní hodnotu 0 a obráceně.

- a) Hlavním městem České republiky není Brno. / Hlavním městem České republiky je jiná obec než Brno.
- b) 3 není menší než 5. / 3 je větší nebo rovno 5. / $3 \geq 5$.
- c) Existuje klaun, který nemá červený nos. / Alespoň jeden klaun má jinou barvu nosu než červenou.
- d) Dnes není pondělí. / Dnes je jiný den než pondělí. / Dnes je úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota nebo neděle.

Poznámka: Negací (a) není výrok „Hlavním městem České republiky je Praha“, negací (b) není výrok $3 > 5$, negací (c) není výrok „Žádný klaun nemá červený nos“ a obdobně negací (d) není výrok typu „Dnes je středa.“

3) Formulujte následující výroky slovy, negujte je a rozhodněte o jejich pravdivosti, resp. o pravdivosti jejich negace.

- a) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}): x \cdot y = 5$.

b) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}): x \cdot y = 5$.

c) $\exists x \in \mathbb{Z}: |x| = -x$.

Řešení:

- a) „Ke každému reálnému
- x
- existuje reálné
- y
- takové, že
- $x \cdot y$
- je rovno 5.“ Výrok není pravdivý, neboť pro
- $x = 0$
- nebude rovnost splněna.

Negace: $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}): x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Existuje reálné x takové, že pro každé y je $x \cdot y$ různé od 5.“ Toto tvrzení pravdivé je, stačí, aby existovalo takové x jedno jediné – je jím 0.

- b) „Existuje reálné
- x
- takové, že pro každé
- y
- je
- $x \cdot y$
- rovno 5.“ Výrok není pravdivý, protože pokud by takové
- x
- existovalo, muselo by se rovnat
- $\frac{5}{y}$
- , avšak výraz
- $\frac{5}{y}$
- není pro měnící se
- y
- konstantní. Ještě lépe lze pravdivost nahlédnout z pravdivosti negace.

Negace: $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}): x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Ke každému reálnému x existuje reálné y takové, že $x \cdot y$ je různé od 5.“ Toto tvrzení je pravdivé, neboť ke každému číslu x snadno nalezneme alespoň jedno (zřejmě i více) čísel y takových, aby součin $x \cdot y$ byl různý od 5.

- c) „Existuje celé číslo
- x
- takové, že jeho absolutní hodnota je rovna číslu
- k
- němu opačnému.“ Výrok je pravdivý. K prokázání pravdivosti stačí nalézt alespoň jedno takové číslo, je jím např.
- $x = -2$
- .

Negace: $\forall x \in \mathbb{Z}: |x| \neq -x$. Slovy: „Pro každé celé číslo x platí, že jeho absolutní hodnota je různá od čísla opačného k x .“ Tento výrok pravdivý není, neboť (jak již z výše uvedeného víme) např. pro $x = -2$ rovnost platí.*složený výrok, logické spojky (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)*

- 1) Určete pravdivost výroků.

a) $5 > 3 \wedge 5 < 3$.

b) $5 > 3 \vee 5 < 3$.

c) $3 > 5 \Rightarrow 3|6$.

d) $2 \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 = 5$.

Řešení:

- a) Jedná se o konjunkci výroků $5 > 3$ a $5 < 3$. Ta je pravdivá tehdy, jsou-li oba dílčí výroky pravdivé, což zde nenastává ($5 < 3$ není pravdivý výrok), tedy daný výrok není pravdivý.
- b) Jedná se o disjunkci výroků $5 > 3$ a $5 < 3$. Ta je pravdivá tehdy, je-li alespoň jeden z dílčích výroků pravdivý. Výrok $5 > 3$ je pravdivý, proto je i daný výrok pravdivý.
- c) Jedná se o implikaci výroků $3 > 5$ a $3|6$ (v tomto pořadí). Ta není pravdivá pouze v případě, kdy je první dílčí výrok pravdivý a druhý nepravdivý, což zde nenastává ($3 > 5$ není pravdivý výrok, pravdivost druhého výroku je tedy nepodstatná), tedy daný výrok je pravdivý.
- d) Jedná se o ekvivalenci výroků $2 \cdot 3 = 5$ a $3 \cdot 2 = 5$. Ta je pravdivá tehdy, jsou-li oba dílčí výroky zároveň pravdivé nebo zároveň nepravdivé. V tomto případě jsou oba dílčí výroky nepravdivé, tedy daný výrok je pravdivý.

- 2) Výroky z předchozího cvičení negujte.

Řešení:

- a) Jedná se o konjunkci výroků $5 > 3$ a $5 < 3$. Negací konjunkce je disjunkce negací dílčích výroků, tedy: $5 \leq 3 \vee 5 \geq 3$.
- b) Jedná se o disjunkci výroků $5 > 3$ a $5 < 3$. Negací disjunkce je konjunkce negací dílčích výroků, tedy: $5 \leq 3 \wedge 5 \geq 3$.

- c) Jedná se o implikaci výroků $3 > 5$ a $3 \nmid 6$ (v tomto pořadí). Negací implikace je konjunkce prvního a negace druhého dílčího výroku, tedy: $3 > 5 \wedge 3 \nmid 6$.
- d) Jedná se o ekvivalenci výroků $2 \cdot 3 = 5$ a $3 \cdot 2 = 5$. Negací ekvivalence je disjunkce dvou konjunkcí – konjunkce prvního a negace dílčího výroku, resp. konjunkce druhého a negace prvního výroku. Tedy: $(2 \cdot 3 = 5 \wedge 3 \cdot 2 \neq 5) \vee (2 \cdot 3 \neq 5 \wedge 3 \cdot 2 = 5)$.

3) Určete pravdivost výroků.

- a) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n < 5$.
- b) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n \mid 15$
- c) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| < 0 \vee x^2 < 0$.
- d) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = x \vee |x| = -x$.
- e) $\forall n \in \mathbb{N} : n < 5 \Rightarrow 2n < 7$.
- f) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \Rightarrow n + 1 \geq 3$.
- g) $\forall q \in \mathbb{R} : 2q < \frac{3}{4} \Leftrightarrow q < \frac{3}{8}$.
- h) $\forall q \in \mathbb{R} : q > 3 \Leftrightarrow q^2 > 9$.

Řešení:

- a) Snažíme se najít alespoň jedno přirozené číslo n , které je sudé a zároveň menší než 5. Takové číslo existuje, např. $n = 2$ (další možností je $n = 4$). Výrok je tedy pravdivý.
- b) Snažíme se najít alespoň jedno přirozené číslo n , které je sudé a zároveň dělí 15. Děliteli čísla 15 jsou čísla 1, 3, 5, 15 (a žádné jiné), avšak žádné z nich není sudé. Výrok je tedy nepravdivý.
- c) Uvedená disjunkce má platit pro každé celé číslo x . Pokud najdeme alespoň jedno celé číslo, pro které konjunkce neplatí, pak daný výrok nebude pravdivý. Uvažujme např. $x = 2$. Potom není pravda, že $|x| < 0$, ale ani že $x^2 < 0$, daný výrok je tedy nepravdivý.
- d) Uvedená disjunkce má platit pro každé celé číslo x . Pokud najdeme alespoň jedno celé číslo, pro které konjunkce neplatí, pak daný výrok nebude pravdivý. Pro libovolné $x \geq 0$ je však pravdivý první dílčí výrok, a tedy i celá disjunkce. Obdobně pro libovolné $x < 0$ je pravdivý druhý dílčí výrok, a tedy opět i celá disjunkce. Daný výrok je tedy pravdivý.
- e) U implikace je rozhodující, zda za předpokladu pravdivého prvního dílčího výroku je pravdivý i druhý dílčí výrok, či nikoliv. Aby platilo, že $n < 5$, pak $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pro $n = 4$ však není pravda, že $2n < 7$, a tedy je daný výrok nepravdivý.
- f) U implikace je rozhodující, zda za předpokladu pravdivého prvního dílčího výroku je pravdivý i druhý dílčí výrok, či nikoliv. Zkoumáme tedy platnost druhého dílčího výroku pro $n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Druhý dílčí výrok lze upravit do tvaru $n \geq 2$. Tuto podmínku však všechna uvažovaná sudá čísla splňují, a tedy je daný výrok pravdivý.
- g) Pravdivost ekvivalence můžeme ověřit prozkoumáním pravdivosti implikací oběma směry. Nejprve uvažujme implikaci zleva doprava. Pokud q splňuje podmínku $2q < \frac{3}{4}$, pak úpravou (dělením nerovnice dvěma) získáme, že také $q < \frac{3}{8}$. V případě implikace zprava doleva naopak nerovnici dvěma vynásobíme. Daný výrok je pravdivý.
- h) Pravdivost ekvivalence můžeme ověřit prozkoumáním pravdivosti implikací oběma směry. Nejprve uvažujme implikaci zleva doprava. Pokud q splňuje podmínku $q > 3$, pak platí, že $q^2 > 9$. V případě implikace zprava doleva však nejprve předpokládáme, že $q^2 > 9$, z čehož plyne, že q může nabývat libovolné hodnoty z intervalů $(-\infty; -3)$ a $(3; \infty)$, neboli implikace zprava doleva neplatí (např. pro $q = -5$), a tedy i neplatí daný výrok.

4) Výroky z předchozího cvičení negujte.

Řešení:

- a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ nedělí } n \vee n \geq 5.$
- b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ nedělí } n \vee n \text{ nedělí } 15$
- c) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0 \wedge x^2 \geq 0.$
- d) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \neq x \wedge |x| \neq -x.$
- e) $\exists n \in \mathbb{N} : n < 5 \wedge 2n \geq 7.$
- f) $\exists n \in \mathbb{N} : 2|n \wedge n + 1 < 3.$
- g) $\exists q \in \mathbb{R} : (2q < \frac{3}{4} \wedge q \geq \frac{3}{8}) \vee (2q \geq \frac{3}{4} \wedge q > \frac{3}{8}).$
- h) $\exists q \in \mathbb{R} : (q > 3 \wedge q^2 \leq 9) \vee (q \leq 3 \wedge q^2 > 9).$

výroková proměnná, výroková formule, obrácená a obměněná implikace, tautologie, kontradikce

- 1) Kdy je formule $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ nepravdivá?

Řešení: Formule má podobu implikace. Implikace je nepravdivá pouze tehdy, když je pravdivá její první část a zároveň nepravdivá část druhá. První část, tj. formule $A \vee B$ je pravdivá, je-li alespoň jedna z proměnných A, B pravdivá. Duhá část, tj. formule $A \Rightarrow B$ je nepravdivá pouze tehdy, když je $p(A) = 1$ a $p(B) = 0$. V tomto případě je první část pravdivá, což jsme chtěli. Daná formule je nepravdivá pouze tehdy, když A je pravdivé a B nepravdivé.

- 2) Výrokovou formuli $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ negujte a запиšte co nejjednodušší formuli ekvivalentní s touto negací takovou, že obsahuje jen (ne nutně oba) dané dílčí výroky A, B , jejich negace a spojku $\wedge$.

Řešení: Formule má podobu implikace. Negací implikace je konjunkce první části a negace druhé části, tedy $(A \vee B) \wedge (A \wedge \neg B)$. Formule s touto formulí ekvivalentní je např. $A \wedge \neg B$, což lze ověřit úvahou nebo tabulkou pravdivostních hodnot.

- 3) Zapište a) obrácenou, b) obměněnou implikaci k $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. V jakém vzájemném vztahu jsou implikace a její obměna?

Řešení:

- a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B).$
 - b) $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$, neboli $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B).$
- Implikace a její obměna jsou navzájem ekvivalentní.

- 4) Z uvedených formulí vyberte a) tautologie, b) kontradikce.

- a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$
- b) $(A \wedge B) \wedge (\neg A).$
- c) $(A \vee B) \vee (A \Rightarrow B).$
- d) $A \Rightarrow (A \Rightarrow B).$
- e) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Leftrightarrow A.$

Řešení: Úlohu lze řešit úvahou nebo tabulkou pravdivostních hodnot.

- a) Tautologiemi jsou formule a), c), e).
- b) Kontradikcí je formule b).