

# Logické myšlení v matematice

**Induktivní postup** – od jednoduchého ke složitějšímu, od konkrétního k abstraktnímu.

**Deduktivní postup** – od složitého k elementárnímu (celek rozložen na dílčí kroky), od abstraktního ke konkrétnímu.

## Induktivní metody v matematice

### I) Úplná indukce

- aplikovatelná na konečné (malé) množiny
- objevíme společnou vlastnost všech prvků, poté vyslovíme obecný výrok (pravdivý pro danou množinu objektů)

*Příklad:* Zkoumejte počty vrcholů, hran a stěn krychle, pravidelného čtyřstěnu, pravidelného osmistěnu, pětibokého jehlanu a šestibokého hranolu. Najděte vztah mezi počty jejich vrcholů, hran a stěn.

*Řešení:*

|          | $v$ | $h$ | $s$ |
|----------|-----|-----|-----|
| krychle  | 8   | 12  | 6   |
| čtyřstěn | 4   | 6   | 4   |
| osmistěn | 6   | 12  | 8   |
| jehlan   | 6   | 10  | 6   |
| hranol   | 12  | 18  | 8   |

$$s + v = h + 2$$

## II) Analogie

- k dispozici máme obecné věty o objektech jedné třídy, na jejich základě vyslovujeme obecná (zatím nedokázaná) tvrzení o prvcích druhé třídy)
- mezi prvky jednotlivých tříd/množin musí být určitá podobnost
- například přechod z roviny do prostoru, z přirozených čísel na celá/racionální apod.
- nebezpečné, může vést k vyslovení neplatných tvrzení

*Příklad:* Zformulujte analogické věty o čtyřstěnech k následujícím větám o trojúhelnících a posuďte jejich platnost.

- I. Každému trojúhelníku lze opsat i vepsat kružnici.
- II. V každém trojúhelníku se těžnice protínají v jednom bodě.
- III. V každém trojúhelníku se výšky protínají v jednom bodě.

*Řešení:*

- I. Každému čtyřstěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu. (platí)
- II. V každém čtyřstěnu se těžnice protínají v jednom bodě. (platí, ale těžiště dělí těžnice v poměru 1 : 3)
- III. V každém čtyřstěnu se výšky protínají v jednom bodě. (neplatí)

## III) Zobecňování

- rozšíření pojmů a poznatků na větší třídu/množinu
- např. pojem mnohoúhelník je zobecněním trojúhelníku, čtyřúhelníku, ...
- typické je také zobecňování vět
- často je provázáno zavedením proměnných (pokud se pracovalo s konstantami) nebo parametrů (pokud se pracovalo s proměnnými)

*Příklad:* Zobecněte Pýthagorovu větu.

## Logické myšlení v matematice

*Řešení:*

- a) pro obecný trojúhelník – kosinová věta
- b) pro pravoúhlý trojúhelník: Jsou-li nad odvěsnami a přeponou sestaveny navzájem podobné útvary, pak součet obsahů těchto útvarů nad odvěsnami se rovná obsahu útvaru nad přeponou.

## IV) Neúplná indukce

- vyslovení hypotézy (bez užití analogie či zobecňování) na základě prozkoumání několika prvků třídy a objevení jisté společné vlastnosti a její následné ověření
- hypotézu
  - dokážeme, tj. získáme novou větu deduktivního systému
  - vyvrátíme, tj. novou větou systému je negace původní věty
  - nejsme schopni ani dokázat, ani vyvrátit – metateoretický problém, problém nerozhodnutelnosti hypotéz v daném deduktivním systému

*Příklad:* Podíváme-li se na hodnoty výrazu  $n^2 + n + 11$  pro  $n = 1, 2, \dots, 9$ , můžeme vyslovit hypotézu, že pro každé přirozené  $n$  je hodnotou daného výrazu liché číslo. Dále můžeme vyslovit hypotézu, že hodnotou výrazu je pro každé přirozené  $n$  prvočíslo. Obě hypotézy dokažte, nebo vyvráťte.

*Řešení:*

- a) důkaz:  $n^2 + n + 11 = n(n + 1) + 11$ ; součin sudého a lichého je sudý, přičteme 11 (liché), tj. součet je lichý
- b) vyvrátíme – pro  $n = 10$  je hodnota 121, což není prvočíslo; tím jsme dokázali, že existuje  $n$  takové, že hodnotou výrazu není prvočíslo

## Deduktivní metody v matematice

Deduktivní metodou v matematice jsou *důkazy*, přičemž využíváme pravidlo *modus ponens* (též *pravidlo odloučení*).

## Typy důkazů

- *přímý*
  - sestrojení řetězce implikací
  - pokud již věta je ve tvaru implikace, známe začátek a konec řetězce
  - pokud neznáme začátek řetězce, musíme jej najít – tato fáze se nazývá *rozbór*
- *nepřímý*
  - pro věty ve tvaru implikace, dokazujeme obměněnou implikaci
- *sporem*
  - dokazujeme, že neplatí negace původního výroku
  - občas uváděno jako speciální případ nepřímého důkazu
- *matematickou indukcí*
  - ověření pro „první krok“, indukční předpoklad, indukční krok
  - „indukční vláček“

SŠ logika zahrnuje logické hrátky (už od ZŠ), výroky a operace s nimi a důkazové techniky.

Další pojmy: tautologie, kontradikce, obecný a existenční kvantifikátor.

*Příklad:* Dokažte pomocí různých typů důkazů, že  $\forall n \in \mathbb{N}: 2|(n^3 - 11n)$ .

*Řešení:*

- a) důkaz sporem: Předpokládáme, že existuje přirozené  $n$  takové, že daný výraz není dělitelný dvěma. Ukážeme zvlášť pro  $n$  sudé a pro  $n$  liché, že daný výraz je sudý, což je spor s předpokladem.
- b) důkaz matematickou indukcí: Ukážeme, že pro  $n = 1$  tvrzení platí. Dále dokážeme, že za předpokladu, že platí tvrzení v  $n$ -tém kroku, platí i v kroku následujícím, tedy, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2|(n^3 - 11n) \Rightarrow 2|[(n + 1)^3 - 11(n + 1)].$$

- c) důkaz přímý: Zadaný polynom upravíme do tvaru, u něž je patrné, že je sudý.

$$n^3 - 11n = n^3 - 11n + n - n = n(n^2 - 1) - 10n = (n - 1)n(n + 1) - 10n$$