

## Vstupní test - řešení

- 1) Řešte rovnici s neznámou
- $x \in \mathbb{R}$
- a s parametrem
- $p \in \mathbb{R}$
- :

$$px^2 - (2p + 2)x + 4 + p = 0$$

*Řešení:* Pro  $p = 0$  se jedná o lineární rovnici  $-2x + 4 = 0$ , která má jediný kořen  $x = 2$ . Pro  $p \neq 0$  spočítáme diskriminant kvadratické rovnice:

$$D = (-2p - 2)^2 - 4p(4 + p) = 4p^2 + 8p + 4 - 16p - 4p^2 = 4 - 8p = 4(1 - 2p)$$

- a)  $D = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ , rovnice má jeden dvojnásobný kořen  $x = 3$ .  
 b)  $D > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$ , tedy pro  $p < \frac{1}{2} \wedge p \neq 0$  má rovnice dva různé reálné kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{2p + 2 \pm 2\sqrt{1 - 2p}}{2p} = \frac{p + 1 \pm \sqrt{1 - 2p}}{p}$$

- c)  $D < 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$ , v tomto případě rovnice nemá žádné reálné kořeny.

- 2) Řešte rovnici s neznámou
- $x \in \mathbb{R}$
- :

$$3 \log 2x^2 + 2 \log 3x^3 = 5 \log x + 2 \log 6x^3$$

*Řešení:* Rovnice má smysl pro  $x > 0$ . Postupnými úpravami ji převedeme na rovnost dvou logaritmů.

$$\log(2x^2)^3 + \log(3x^3)^2 = \log x^5 + \log(6x^3)^2$$

$$\log 8x^6 \cdot 9x^6 = \log x^5 \cdot 36x^6$$

Logaritmus je prostá funkce z rovnosti funkčních hodnot vyplývá rovnost argumentů:

$$8x^6 \cdot 9x^6 = x^5 \cdot 36x^6$$

Po úpravě dostáváme řešení  $x = \frac{1}{2}$ .

- 3) Řešte rovnici s neznámou
- $x \in \mathbb{R}$
- :

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x$$

*Řešení:* Je zřejmé, že rovnice nemá smysl pro  $\operatorname{tg} x = 1$  a  $\cos x = 0$ , což dohromady dává podmínku  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ . Tangens nahradíme podílem funkcí sinus a kosinus a použijeme vztah pro  $\cos 2x$ :

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

Oba výrazy převedeme na stejnou stranu, dáme na společný jmenovatel a upravíme do tvaru:

$$\frac{(\cos x + \sin x) [1 - 2(\cos x - \sin x)^2]}{\cos x - \sin x} = 0$$

Zlomek je roven nule, pokud se čítec rovná nule.

- a)  $\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- b)  $1 - 2(\cos x - \sin x)^2 = 0$   
 $(\cos x - \sin x)^2$  upravíme do tvaru  $\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \cos x \sin x = 1 - \sin 2x$ , tedy  
 $1 - 2(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2(1 - \sin 2x) = 2 \sin 2x - 1$ , řešíme tedy rovnici  
 $2 \sin 2x - 1 = 0$  neboli  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ , což platí pro  $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ,  $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Množinu všech řešení lze zapsat následovně:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$$

- 4) Jsou dány množiny  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{5, 6, 7, 8\}$ . Zapište výčtem následující množinu

$$R = \{(a, b) \in A \times B, b > 5 \Rightarrow a = \frac{b}{2} - 1\}$$

.

*Řešení:* Implikace je nepravdivá pouze tehdy, je-li splněn předpoklad a neplatí závěr. Tedy s číslem 5 z množiny  $B$  jsou v relaci všechny prvky množiny  $A$ , se zbylými prvky množiny  $B$  jsou v relaci pouze taková  $a$ , pro která platí  $a = \frac{b}{2} - 1$ .

$$R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (2, 6), (3, 8)\}$$

- 5) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\ln \cos x}}$$

*Řešení:* Pod třetí odmocninou může být libovolné reálné číslo. Musíme tedy vyloučit pouze situace, kdy ve jmenovateli zlomku bude nula a kdy argument přirozeného logaritmu bude menší nebo roven nule.

$$\begin{aligned} \ln \cos x \neq 0 &\Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x > 0 &\Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow D_f &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right\} \end{aligned}$$

- 6) Načrtněte graf funkce, určete definiční obor a obor hodnot:

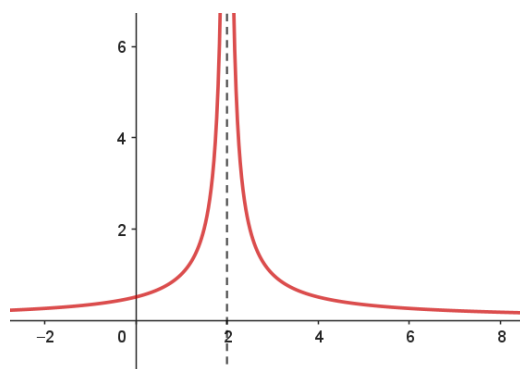
$$g(x) = \frac{1}{|x-2|}$$

*Řešení:* Funkce není definována, pokud je ve jmenovateli 0, tj.  $D_f = \mathbb{R} \setminus 2$ .

Pro  $x > 2$  je funkce určena předpisem  $g_1(x) = \frac{1}{x-2}$ , grafem je polovina rovnoosé hyperboly s asymptotami  $y = 0, x = 2$ .

Pro  $x < 2$  je funkce určena předpisem  $g_2(x) = \frac{-1}{x-2}$ , její graf je souměrný s grafem  $g_1$  podle svislé asymptoty  $x = 2$ .

Oborem hodnot jsou všechna kladná reálná čísla.



Obrázek 1: Řešení příkladu 6

- 7) Pro  $z = 2 - 4i$  vyjádřete v co nejjednodušším tvaru komplexní číslo:

$$\frac{z}{1-i} + (1+i)\bar{z} - (3+2i)$$

*Řešení:*

$$\frac{2-4i}{1-i} + (1+i)\overline{(2-4i)} - (3+2i) = \frac{2-4i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + (1+i)(2+4i) - (3+2i) = \frac{6-2i}{2} + (-3+6i) - (3+2i) = 3-i-3+6i-3-2i = -3+3i$$

- 8) Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ , kořeny запиšte v algebraickém tvaru a znázorněte v Gaussově rovině:

$$x^6 = 1$$

*Řešení:* Zapišeme si číslo 1 v goniometrickém tvaru a spočítáme komplexní šesté odmocniny z jedné:

$$1 = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$x_k = \sqrt[6]{1} \left( \cos \frac{0^\circ + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0^\circ + 2k\pi}{6} \right) = \left( \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- 9) Dokažte sporem větu: Pro všechna kladná reálná čísla  $a, b$  platí  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

*Řešení:* Větu znegujeme a pokusíme se z negace odvodit nepravdivé tvrzení

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2$$

Protože  $a, b \in \mathbb{R}^+$  můžeme nerovnici vynásobit  $a \cdot b$  aniž by se změnilo znaménko nerovnice.

$$a^2 + b^2 < 2ab$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 < 0$$

Což není splněno pro žádná  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , negaci jsme přivedli ke sporu, původní tvrzení je tedy pravdivé.