FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Mathematická statistika 2

NMSA 332

Sbírka úloh

Arnošt Komárek, Marek Omelka, Daniel Hlubinka, Matúš Maciak, Stanislav Nagy

Poslední úprava dokumentu: 23. dubna 2024

Budeme velmi vděční za upozornění na případné chyby a překlepy.

Obsah

1 Podmíněné hustoty, podmíněné momenty

Z teorie pravděpodobnosti (NMSA 333) víme, že podmíněná střední hodnota Y při daném X je definována jako

$$\mathsf{E}\left(Y \mid X\right) = \mathsf{E}\left(Y \mid \sigma(X)\right),$$

kde $\sigma(X)$ je σ-algebra generovaná náhodnou veličinou X. V následujícím uvažujeme speciální případ, že náhodný vektor $(X, Y)^{\mathsf{T}}$ má sdruženou hustotou $f_{X,Y}(x, y)$ vůči dvourozměrné Lebesgueově míře.

Podmíněná hustota náhodné veličiny Y pro dané X se definuje pro $f_X(x) > 0$ jako

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

kde $f_X(x)$ je marginální hustota X.

Podmíněná střední hodnota:

$$\mathsf{E}\left(Y \mid X = x\right) = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy.$$

Tak jako je $\mathsf{E}\, Y$ „nejlepší“ odhad Y (ve smyslu minimalizace kvadratické ztrátové funkce) při znalosti pouze marginálního rozdělení Y, tak $\mathsf{E}\left(Y \mid X\right)$ je „nejlepší“ odhad Y při znalosti X. Přesněji pokud $\mathsf{E}\, Y^2 < \infty$, pak

$$\mathsf{E}\, Y = \operatorname*{arg\,min}_{c \in \mathbb{R}} \mathsf{E}\,(Y - c)^2$$
$$\mathsf{E}\left(Y \mid X\right) = \operatorname*{arg\,min}_{f \text{ měřit. funkce } X} \mathsf{E}\,(Y - f(X))^2.$$

Pozor. Zatímco na $\mathsf{E}\left(Y \mid X = x\right)$ se díváme jako na **funkci** definovanou na nosiči veličiny X, tak $\mathsf{E}\left(Y \mid X\right)$ chápeme jako **náhodnou veličinu**, která je funkcí X.

Někdy si jde výpočty ulehčit využitím některých z následujících vlastností podmíněné střední hodnoty.

Vlastnosti podmíněné střední hodnoty: Nechť $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí

(i) $\mathsf{E}\left(a \mid X\right) = a$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\left(Y \mid X\right)\big) = \mathsf{E}\, Y$.

(iii) $\mathsf{E}\left(Y \mid X\right) = \mathsf{E}\, Y$ pokud X a Y jsou nezávislé.

(iv) $\mathsf{E}\left(a_1 h_1(X, Y) + a_2 h_2(X, Y) \mid X\right) = a_1 \mathsf{E}\left(h_1(X, Y) \mid X\right) + a_2 \mathsf{E}\left(h_2(X, Y) \mid X\right)$ pro libovolné $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(v) $\mathsf{E}\left(\psi(X) h_1(X, Y) \mid X\right) = \psi(X)\, \mathsf{E}\left(h_1(X, Y) \mid X\right)$.

Rozklad nepodmíněného rozptylu: Podmíněný rozptyl náhodné velčiny Y za podmínky X je definován jako

$$\mathsf{var}\,(Y \mid X) = \mathsf{E}\left((Y - \mathsf{E}\,(Y \mid X))^2 \,\middle|\, X\right) = \mathsf{E}\left(Y^2 \,\middle|\, X\right) - \left[\mathsf{E}\,(Y \mid X)\right]^2.$$

Pro podmíněný rozptyl platí

$$\mathsf{var}(Y) = \mathsf{E}\big[\mathsf{var}\,(Y \mid X)\big] + \mathsf{var}\big(\mathsf{E}\,(Y \mid X)\big).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(Y) &= \mathsf{E}\,Y^2 - \big[\mathsf{E}Y\big]^2 = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(Y^2 \,\middle|\, X\right)\right] - \big[\mathsf{E}Y\big]^2 \\ &= \mathsf{E}\left[\mathsf{var}\,(Y \mid X)\right] + \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\,(Y \mid X)\right]^2 - \left[\mathsf{E}\{\mathsf{E}\,(Y \mid X)\}\right]^2 \\ &= \mathsf{E}\left[\mathsf{var}\,(Y \mid X)\right] + \mathsf{var}\big(\mathsf{E}\,(Y \mid X)\big).\end{aligned}$$

Příklad 1. $f(x, y) = x + y$

Nechť $(X, Y)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = (x + y)\mathbb{I}_M(x, y), \quad M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(i) Určete $\mathsf{E}\,(XY \mid X = x)$.
(ii) Určete $\mathsf{E}\,(XY \mid X)$.
(iii) Určete $\mathsf{E}\left(XY^2 \,\middle|\, X\right)$.
(iv) Určete $\mathsf{E}\left(XY^2 \,\middle|\, X^2\right)$.

Příklad 2. Podmíněně normální rozdělení

Uvažujme náhodný vektor $(Y, X)^\mathsf{T}$. Nechť Y podmíněno X má normální rozdělení se střední hodnotou $2\,X^3$ a rozptylem $3\,X^2$. Dále nechť X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

(i) Určete $\mathsf{E}\big[\frac{Y}{X^2}|X\big]$.
(ii) Určete $\mathsf{E}\,\frac{Y}{X^2}$.
(iii) Určete $\mathsf{E}\,Y$.
(iv) Určete $\mathsf{var}(Y)$.

Příklad 3. Podmíněná střední hodnota rozdělení na obdélníku

Nechť má náhodný vektor $(X,\, Y)^\mathsf{T}$ rozdělení s hustotou

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\exp\Big(-\dfrac{y}{x}\Big), & 1 < x < 2,\ y > 0, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

(i) Určete $\mathsf{E}\big(Y \,\big|\, X = t\big)$ a $\mathsf{E}\big(Y \,\big|\, X\big)$.

(ii) Určete $\mathsf{E}\left(Y \,\middle|\, \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right) = t\right)$ a $\mathsf{E}\left(Y \,\middle|\, \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right)$.

(iii) Určete $\mathsf{E}\left(\frac{Y}{X^6} \,\middle|\, \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right)$

Příklad 4. Podmíněná střední hodnota rozdělení na rovnoběžníku

Nechť má náhodný vektor $(X,\, Y)^{\mathsf{T}}$ rozdělení s hustotou

$$f(x,\, y) = c\, y\, \mathbb{I}_M(x, y),$$

kde $M = \big\{(x,\, y) : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y+1\big\}$ a $c > 0$ je vhodná konstanta.

(i) Určete $\mathsf{E}\left[911\, X - \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \,\middle|\, Y\right]$.

(ii) Určete $\mathsf{E}\left[\sin(X) \,\middle|\, Y\right]$.

Příklad 5. Podmíněná střední hodnota

Nechť $(X,\, Y)^{\mathsf{T}}$ je náhodný vektor.

(i) Určete $\mathsf{E}\big(X + Y \,\big|\, X\big)$, jestliže X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

(ii) Určete $\mathsf{E}\big(X + Y \,\big|\, X\big)$, jestliže X a Y nejsou nutně nezávislé.

(iii) Určete $\mathsf{E}\big(X \,\big|\, X + Y\big)$, jestliže rozdělení $(X,\, Y)^{\mathsf{T}}$ je zaměnitelné, tj. náhodné vektory $(X,\, Y)^{\mathsf{T}}$ a $(Y,\, X)^{\mathsf{T}}$ mají stejné rozdělení.

(iv) Určete $\mathsf{E}\big(X_1 \,\big|\, \sum_{i=1}^{n} X_i\big)$ pro $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr.

Poznámka. Výsledek se snažte vyjádřit co možná nejjednodušším způsobem při použití co možná nejmenšího počtu podmíněných středních hodnot.

Příklad 6. Podmíněně rovnoměrné rozdělení

Uvažujme náhodný vektor $(Y, X)^{\mathsf{T}}$. Nechť Y podmíněno X má rovnoměrné rozdělení $\mathsf{R}(0, X^2+1)$. Dále nechť X má normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$.

(i) Určete $\mathsf{E}\big[Y | \exp\{X\}\big]$.

(ii) Určete $\mathsf{E}\, Y$.

(iii) Určete $\mathsf{var}(Y)$.

Příklad 7. Podmíněná střední hodnota s rovnoměrným rozdělením na trojúhelníku

Nechť má náhodný vektor $(X,\, Y)^{\mathsf{T}}$ rovnoměrné rozdělení na množině $M = \big\{(x,\, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x \le y\big\}$.

(i) Určete $\mathsf{E}\left[\log(X) \,\middle|\, Y\right]$.

(ii) Určete $\mathsf{E}\left[X \,\middle|\, \log(Y)\right]$.

(iii) Určete $\mathsf{E}\left[\log(X) \,\middle|\, \log(Y)\right]$.

Příklad 8. Hustota $f(x,y) = \frac{3(x^2+y)}{5}$

Nechť $(X,Y)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x,y) = \tfrac{3}{5}\,(x^2+y)\mathbb{I}_M(x,y), \quad M = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

(i) Určete $\mathsf{E}\left(YX^2 \,\middle|\, X = x\right)$, $\mathsf{E}\left(YX^2 \,\middle|\, X\right)$, $\mathsf{E}\left(X \mid Y^2\right)$.

(ii)* Určete $\mathsf{E}\left(Y \mid X^2\right)$.

(iii)* Určete $\mathsf{E}\left(XY \mid X^2\right)$.

(iv)* Určete $\mathsf{E}\left(X \mid X^2\right)$.

Příklad 9. Podmiňování uspořádaným náhodným výběrem

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z absolutně spojitého rozdělení, a nechť $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ je příslušný uspořádaný náhodný výběr.

(i) Určete $\mathsf{E}\left(X_1 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$.

(ii) Určete $\mathsf{E}\left(X_1 \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$.

(iii) Pro $h_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ najděte $\mathsf{E}\left(h_1(X_1) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$.

(iv) Pro $h_2 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ najděte $\mathsf{E}\left(h_2(X_1, X_2) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$.

(v) Zjednodušte výsledek předchozí části v případě, že funkce h_2 je symetrická, tj. $h_2(x,y) = h_2(y,x)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

2 Raova-Cramérova mez a Fisherova míra informace

Fisherova míra informace

Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ má hustotu $f(\boldsymbol{x};\theta)$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ, kde $\theta \in \Theta$ je neznámý (jednorozměrný) parametr. Za předpokladu, že systém hustot $\{f(\boldsymbol{x};\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ je regulární (viz přednáška) definujeme **Fisherovu míru informace** $J_n(\theta)$ o parametru θ obsaženou ve vektoru $\boldsymbol{X}$ pomocí předpisu

$$J_n(\theta) = \mathsf{E}_\theta \left[\frac{\partial \log f(\boldsymbol{X};\theta)}{\partial\theta}\right]^2 = \mathsf{E}_\theta \left[\frac{f'(\boldsymbol{X};\theta)}{f(\boldsymbol{X};\theta)}\right]^2. \tag{1}$$

Za určitých dalších předpokladů regularity (viz přednáška) lze Fisherovu míru informace počítat pomocí

$$J_n(\theta) = -\,\mathsf{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{X};\theta)}{\partial\theta^2}\right], \tag{2}$$

což bývá zpravidla výpočetně jednodušší než (1).

Fisherova míra informace se nepoužívá pouze v níže uvedené Raově-Cramérově mezi, ale jak uvidíme později, tak je také klíčová v teorii maximální věrohodnosti.

Nechť $\boldsymbol{X}$ je tvořen n nezávislými stejně rozdělenými náhodnými veličinami (vektory) $X_1, \ldots, X_n$. Potom

$$J_n(\theta) = n\, J_1(\theta),$$

kde $J_1(\theta)$ je Fisherova míra informace o parametru θ obsažená v X_1.

Nechť $J_n(\theta)$ je Fisherova míra informace o parametru θ a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou a nenulovou derivaci v bodě θ. Potom pro Fisherovu míru informace $\widetilde{J}_n$ o parametru $g(\theta)$ platí

$$\widetilde{J}_n\big(g(\theta)\big) = \frac{J_n(\theta)}{[g'(\theta)]^2}.$$

Raova-Cramérova nerovnost. Nechť $T_n = T_n(\boldsymbol{X})$ je nestranný odhad parametrické funkce $g(\theta)$. Potom

$$\mathsf{var}_\theta(T_n) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{J_n(\theta)}, \qquad \text{pro každé } \theta \in \Theta. \tag{3}$$

Pravá strana nerovnosti (3) se nazývá *Raova-Cramérova dolní mez*. Pokud (3) platí s rovností pro každé $\theta \in \Theta$, pak říkáme, že odhad T_n dosahuje Raovy-Cramérovy dolní meze a je tudíž *nejlepší* (ve smyslu minimálního rozptylu) *nestranný odhad* parametrické funkce $g(\theta)$.

Eficience odhadů. Eficience nestranného (regulárního) odhadu T_n parametru θ se definuje jako

$$e = \frac{1}{J_n(\theta)\,\mathsf{var}_\theta(T_n)}.$$

V případě, že $e = 1$, pak se odhad T_n nazývá *eficientní*.

Příklad 10. Fisherova míra informace a nezávislost

Mějme nezávislé stejně rozdělené vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ s dvourozměrným normálním rozdělením N_2 se střední hodnotou $(\theta, \theta)^\mathsf{T}$ a rozptylovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde ρ je známé.

(i) Určete $J(\theta)$, tj. Fisherovu míru informace o θ obsaženou v $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}$.

(ii) Označte $\overline{X}_n$ výběrový průměr veličin $X_1, \dots, X_n$. Zjistěte zda odhad $\overline{X}_n$ je nestranný odhad parametru θ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Označte $\overline{Y}_n$ výběrový průměr veličin $Y_1, \dots, Y_n$. Zjistěte, zda odhad $\frac{1}{2}(\overline{X}_n + \overline{Y}_n)$ je nestranný odhad parametru θ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 11. Poissonovo rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ.

(i) Určete $J(\lambda)$ obsaženou v X_1.

(ii) Určete $J_n(\lambda)$ obsaženou v $\boldsymbol{X}$.

(iii) Najděte nestranný odhad parametrické funkce $g(\lambda) = 2\,\lambda$ založený na $\sum_{i=1}^n X_i$. Zjistěte, zda je tento odhad eficientní (tj. zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze).

(iv) Zjistěte, zda odhad $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}$ parametrické funkce $g(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(v) Ověřte, že systém hustot pro Poissonovo rozdělení je regulární.

Příklad 12. Paretovo rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Paretova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha) = \frac{\alpha}{x^2}\,\mathbb{I}_{\{x > \alpha\}}, \qquad \text{kde } \alpha > 0.$$

(i) Spočtěte Fisherovu míru informace $J_n(\alpha)$.

Příklad 13. Parametr σ v normálním rozdělení

Buď $X \sim \mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$, kde parametr θ je známý.

(i) Určete $J(\sigma)$.

(ii) Určete $J(\sigma^2)$.

(iii) Ověřte, že systém hustot, se kterým zde pracujete, je regulární.

Příklad 14. Nestranné odhady parametrů σ a σ^2 v normálním rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$.

(i) Ověřte, že $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ je nestranný odhad parametru σ^2. Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(ii) Ověřte, že $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ je nestranný odhad parametru σ^2. Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Ověřte, že $\widehat{\sigma}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n |X_i|$ je nestranný odhad parametru σ. Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iv) Uvažujte odhad $\widetilde{\sigma}_n = c \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$. Najděte konstantu c tak, aby odhad $\widetilde{\sigma}$ byl nestranný. Porovnejte eficienci odhadů $\widehat{\sigma}_n$ a $\widetilde{\sigma}_n$.

Příklad 15. Odhad parametru θ v rovnoměrném rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $R(0, \theta)$. Uvažujte odhady $\widehat{\theta}_n = 2\,\overline{X}_n$, $\widetilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} \max_{1 \le i \le n} X_i$ parametru θ.

(i) Ověřte, že oba odhady $\widehat{\theta}_n$, $\widetilde{\theta}_n$ jsou nestrannými odhady parametru θ.

(ii) Dosahuje některý z těchto odhadů dolní Raovy-Cramérovy meze?

Příklad 16. Odhad parametru p v alternativním rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_1 = 1) = p, \quad \mathsf{P}(X_1 = 0) = 1 - p.$$

(i) Uvažujte $\widehat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ jako odhad parametru p. Zjistěte, zda je tento odhad nestranný a zda dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(ii) Ověřte, že systém hustot, se kterým pracujete, je regulární.

Příklad 17. Odhad λ^{-2} v exponenciálním rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x;\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

(i) Najděte c takové, aby odhad $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ byl nestranným odhadem parametrické funkce $\frac{1}{\lambda^2}$.

(ii) Dosahuje odhad z (i) dolní Raovy-Cramérovy meze?

(iii) Ověřte, že systém hustot je regulární.

Příklad 18. „Curved normal“ $N(\mu, \mu^2)$

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp\left\{ -\tfrac{(x-\mu)^2}{2\,\mu^2} \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu > 0.$$

Uvažujte, $T_1(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n$ a $T_2(\boldsymbol{X}) = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

(i) Najděte α takové, které minimalizuje rozptyl odhadu $T_3(\boldsymbol{X}) = \alpha\, T_1(\boldsymbol{X}) + (1-\alpha)\, T_2(\boldsymbol{X})$.

(ii) Dosahuje odhad $T_3(\boldsymbol{X})$ dolní Raovy-Cramérovy meze?

3 Fisherova informační matice a zobecnění Raovy-Cramérovy meze

Fisherova informační matice

Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ má hustotu $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ, kde $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ je neznámý p-rozměrný parametr. Za předpokladu, že systém hustot $\{f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ je regulární (viz přednáška) definujeme **Fisherovu informační matici** $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{\theta})$

$$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial \log f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}}\right],$$

tj. matice $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ má prvky $\{J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta})\}_{j,k=1,\dots,p}$, kde

$$J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta}) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial \log f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial \log f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}\right].$$

Pro výpočet však bývá zpravidla výhodnější využít toho, že za jistých podmínek regularity

$$J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j\, \partial \theta_k}\right].$$

Podobně jako pro jednorozměrný parametr platí, že pokud $\boldsymbol{X}$ je tvořen n-nezávislými stejně rozdělenými náhodnými veličinami (vektory) $X_1, \dots, X_n$, pak

$$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\, \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\theta}),$$

kde $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice o parametru $\boldsymbol{\theta}$ obsažená v X_1.

Zobecnění Raovy-Cramérovy nerovnosti

Nechť funkce $g : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $\boldsymbol{\theta}$. Nechť $T_n = T_n(\boldsymbol{X})$ je nestranný odhad parametrické funkce $g(\boldsymbol{\theta})$. Potom

$$\mathsf{var}_{\boldsymbol{\theta}}(T_n) \geq \nabla g(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{J}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \big[\nabla g(\boldsymbol{\theta})\big]^\mathsf{T},$$

kde $\nabla g(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p}\right)$ je gradient funkce g v bodě $\boldsymbol{\theta}$.

Příklad 19. Normální rozdělení (oba parametry neznámé)

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Najděte Fisherovu informační matici vektorového parametru $(\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$ obsaženou v náhodné veličině X_1.

(ii) Ověřte, zda odhad $\widehat{\mu}_n = \overline{X}_n$ parametru μ nabývá dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Ověřte, zda odhad $\widehat{\sigma}^2_n = S_n^2$ parametru σ^2 nabývá dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iv) Najděte nestranný odhad parametrické funkce $g(\mu,\sigma^2) = \mu + u_\alpha\, \sigma$, kde u_α je α-kvantil normovaného normálního rozdělení. Dosahuje tento odhad dolní Raovy-Cramérovy meze? *Nápověda. Nestranný odhad parametru σ uvažujte ve tvaru $c_n\sqrt{S_n^2}$, kde konstantu c_n je zapotřebí dopočítat podobně jako příkladu 14(iv).*

Příklad 20. Současný odhad obou parametrů v lognormálním rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

(i) Je odhad $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $g(\mu, \sigma^2) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$?

Příklad 21. Zobecněné exponenciální rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\,(x-\theta)}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x)$, kde $\lambda > 0$ a $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Najděte Fisherovu informační matici $\boldsymbol{J}_n(\lambda, \theta)$ vektorového parametru $(\lambda, \theta)^{\mathsf{T}}$ v náhodném výběru $X_1, \ldots, X_n$.

(ii) Předpokládejte, že θ je známá konstanta. Najděte Fisherovu míru informace $J_n(\lambda)$ v náhodném výběru $X_1, \ldots, X_n$.

Příklad 22. Dvě binomická rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_1 a $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_2, přičemž oba dva výběry jsou na sobě nezávislé.

(i) Najděte Fisherovu informační matici $\boldsymbol{J}_n(p_1, p_2)$ vektorového parametru $(p_1, p_2)^{\mathsf{T}}$ na základě všech dat (tj. $X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$).

(ii) Označte $\overline{X}_{n_1}$ výběrový průměr veličin $X_1, \ldots, X_{n_1}$ a $\overline{Y}_{n_2}$ výběrový průměr veličin $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$. Zjistěte, zda odhad $\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}$ je nestranný odhad parametrické funkce $p_1 - p_2$ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad logaritmu poměru šancí, tj. pro

$$g(p_1, p_2) = \log\left(\frac{\frac{p_1}{1-p_1}}{\frac{p_2}{1-p_2}}\right).$$

(iv) Dosahuje odhad $\widehat{\theta}_n = \log\left(\frac{\frac{\overline{X}_{n_1}}{1-\overline{X}_{n_1}}}{\frac{\overline{Y}_{n_2}}{1-\overline{Y}_{n_2}}}\right)$ dolní Raovy-Cramérovy meze odvozené v (iii)?

Příklad 23. Dvě normální rozdělení se stejným rozptylem

Nechť $X_1, \ldots, X_{n_1}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu_1, \sigma^2)$ a a $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ je náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž oba dva výběry jsou na sobě nezávislé.

(i) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad parametru σ^2.

(ii) Zjistěte, zda odhad $S^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\big[(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2\big]$ dosahuje Raovy-Cramérovy meze odvozené v (i).

Příklad 24. Lineární model přímky

Uvažujte, že pozorujete nezávislé náhodné veličiny $Y_1, \dots, Y_n$. Náhodná veličina Y_i má rozdělení s hustotou

$$f_{Y_i}(y; \beta_0, \beta_1) = \tfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\Big\{ - \tfrac{(y-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{2} \Big\},$$

kde $x_1, \dots, x_n$ jsou známé konstanty.

(i) Najděte Fisherovu informační matici $\boldsymbol{J}_n(\beta_0, \beta_1)$ o vektorovém parametru $(\beta_0, \beta_1)^\mathsf{T}$ obsaženou v náhodných veličinách $Y_1, \dots, Y_n$.

(ii) Zjistěte, zda odhad

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i\,(x_i - \bar{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}, \qquad \text{kde} \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,$$

je nestranný odhad parametru β_1 a zda dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 25.* Dvourozměrné normální rozdělení se společnou střední hodnotou

Mějme nezávislé stejně rozdělené vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ s dvourozměrným normálním rozdělením N_2 se střední hodnotou $(\theta, \theta)^\mathsf{T}$ a rozptylovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde parametry $\theta \in \mathbb{R}$ a $\rho \in (-1, 1)$ jsou neznámé.

(i) Označte $\overline{X}_n$ výběrový průměr veličin $X_1, \dots, X_n$. Zjistěte, zda odhad $\overline{X}_n$ je nejlepší nestranný odhad parametru θ.

(ii) Označte $\overline{Y}_n$ výběrový průměr veličin $Y_1, \dots, Y_n$. Zjistěte, zda odhad $\frac{1}{2}(\overline{X}_n + \overline{Y}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametru θ.

4 Postačující (suficientní) statistiky

Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ má hustotu $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ, kde $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ je neznámý parametr.

Definice 1. Řekneme, že statistika $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ je **postačující** (suficientní) pro parametr $\boldsymbol{\theta}$, jestliže podmíněné rozdělení $\boldsymbol{X}$ při daném $\boldsymbol{S}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.

Postačující statistika tedy obsahuje veškerou informaci o $\boldsymbol{\theta}$, která je v náhodném vektoru $\boldsymbol{X}$. Následující věta je užitečná při hledání postačujících statistik.

Věta 1 (Neymanovo faktorizační kritérium)**.** *Statistika $\boldsymbol{S}$ je postačující právě tehdy, existuje-li taková nezáporná měřitelná funkce $g(\boldsymbol{s};\boldsymbol{\theta})$ a taková nezáporná měřitelná funkce $h(\boldsymbol{x})$, že platí*

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = g\big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}\big)\, h(\boldsymbol{x}).$$

V aplikacích hledáme postačující statistiky, které jsou v jistém smyslu co možná „nejmenší“. Toto se snaží matematicky popsat následující definice.

Definice 2. Řekneme, že postačující statistika $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ je **minimální**, jestliže pro jakoukoliv jinou postačující statistiku $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ existuje funkce $\boldsymbol{g}$ taková, že $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})\big)$ (skoro jistě).

Pro nalezení *minimální* postačující statistiky lze využít následující větu.

Věta 2 (Lehmannova-Scheffého věta o minimálních postačujících statistikách)**.** *Nechť $\boldsymbol{S}$ je postačující statistika a množina $M = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$. Pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ položme*

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}) = \frac{f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})}{f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})}\,.$$

Nechť $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$, implikuje, že $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})$ (pro μ-skoro všechny $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). Pak $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ je minimální.

Někteří autoři formulují větu 2 bez předpokladu, že $\boldsymbol{S}$ je postačující statistika. Potom je však třeba předpokládat, že existuje měřitelná selekce inverzního zobrazení (viz kapitola 7.4.3. knihy Anděl: Základy matematické statistiky, MATFYZPRESS, 2007).

Definice 3. Řekneme, že statistika $\boldsymbol{S}$ je **úplná**, platí-li pro každou její měřitelnou funkci $w(\boldsymbol{S})$ implikace

$$\Big\{\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\, w(\boldsymbol{S}) = 0 \text{ pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\Big\} \Longrightarrow \Big\{w(\boldsymbol{S}) = 0 \text{ skoro jistě pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\Big\}.$$

Příklad 26. Geometrické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = p\,(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Označme $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Z definice ověřte, že $S(\boldsymbol{X})$ je postačující (suficientní) statistika.

(ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria ověřte, že $S(\boldsymbol{X})$ je postačující (suficientní) statistika.

(iii) Ukažte, že $S(\boldsymbol{X})$ je minimální postačující statistika.

(iv) Ukažte, že $\left(\sum_{i=1}^n X_i, \overline{X}_n\right)^\mathsf{T}$ je minimální postačující statistika.

(v) Ukažte, že X_1 je úplná statistika.

(vi) Ukažte, že $(X_1, X_2)^\mathsf{T}$ není úplná statistika.

Příklad 27. Poissonovo rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \frac{\lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Označme $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Z definice ověřte, že $S(\boldsymbol{X})$ je postačující (suficientní) statistika.

(ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria ověřte, že $S(\boldsymbol{X})$ je postačující (suficientní) statistika.

(iii) Dokažte, že $S(\boldsymbol{X})$ je minimální postačující statistika.

(iv) Dokažte, že $X_1 + X_2$ je úplná statistika.

(v) Dokažte, že $(X_1^2, X_2)^\mathsf{T}$ není úplná statistika.

Příklad 28. Rovnoměrné diskrétní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z rovnoměrného diskrétního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \frac{1}{M}, \qquad k = 1, 2, \ldots, M,$$

kde $M \in \mathbb{N}$. Ověřte, že $S(\boldsymbol{X}) = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\}$ je postačující (suficientní) statistika pro parametr M.

(i) Pomocí definice postačující (suficientní) statistiky.

(ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria.

Příklad 29. Normální rozdělení s nulovou střední hodnotou

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$. Ověřte, zda následující statistiky jsou postačující (suficientní) pro parametr σ^2.

$$\text{(i) } \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}, \quad \text{(ii) } \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = \big(|X_1|, \ldots, |X_n|\big)^\mathsf{T}, \quad \text{(iii) } T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{(iv) } T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n |X_i|,$$

$$\text{(v) } T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \text{(vi) } T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \text{(vii) } \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2, X_n^2\right)^\mathsf{T}.$$

Příklad 30. Alternativní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

Definujme $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Dokažte, že $S(\boldsymbol{X})$ je postačující (suficientní) pro parametr p.

(ii) Dokažte, že $S(\boldsymbol{X})$ je dokonce minimální postačující (suficientní) statistika pro parametr p.

(iii) Z definice dokažte, že $T(\boldsymbol{X}) = X_1$ je úplná statistika pro parametr p. Je statistika $T(\boldsymbol{X})$ postačující?

(iv) Z definice dokažte, že $S(\boldsymbol{X})$ je úplná statistika pro parametr p.

Příklad 31. Normální rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

(i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku pro $(\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$.

Příklad 32. Rovnoměrné rozdělení $\mathsf{R}(0, \theta)$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $\mathsf{R}(0, \theta)$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

(i) Ukažte, ze statistika $X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\}$ je postačující a úplná.

(ii) Ukažte, ze statistika X_1 je úplná, ale není postačující.

Příklad 33. Rovnoměrné rozdělení $\mathsf{R}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $\mathsf{R}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Ukažte, že $S(\mathbf{X}) = \big(X_{(1)}, X_{(n)}\big)^\mathsf{T}$ je postačující (suficientní) statistika pro parametr θ.

(ii) Ukažte, že $S(\mathbf{X})$ není úplná.

Příklad 34. Paretovo rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Paretova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta\, \alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\, \mathbb{I}_{\{x > \alpha\}}, \qquad \text{kde } \beta > 0, \alpha > 0.$$

(i) Najděte netriviální postačující statistiku pro parametr $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\mathsf{T}$.

Příklad 35. „Curved normal“ $N(\mu, \mu^2)$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \mu^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$.

(i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku.

(ii) Je statistika z (i) úplná?

Příklad 36. Multinomické rozdělení

Modelujme počty děti narozených během jednotlivých dnů v týdnu pomocí multinomického rozdělení $\mathsf{M}(n, p_1, \ldots, p_7)$, tj.

$$\mathsf{P}\big(X_1 = x_1, \ldots, X_7 = x_7\big) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_7!}\, p_1^{x_1} \cdots p_7^{x_7}, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{7} x_i = n, \quad \sum_{i=1}^{7} p_i = 1.$$

(i) Je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_7)$ minimální postačující (suficientní) statistika pro vektorový parametr $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_7)^{\mathsf{T}}$? Pokud ano, dala by se snížit dimenze této statistiky, aby byla stále minimální postačující (suficientní)?

(ii) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku (pro parametry modelu) za předpokladu, že $p_1 = p_2 = \ldots = p_5$ a $p_6 = p_7$.

(iii) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku za předpokladu, že dětí se rodí se stejnou pravděpodobností v každém dni v týdnu, tj. $p_1 = \ldots = p_7$.

Příklad 37. Normální rozdělení s nulovou střední hodnotou

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathsf{T}}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$. Ukažte, že následující statistiky nejsou úplné.

(i) $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

(ii) $T(\boldsymbol{X}) = \sin(X_1) - 1$.

Příklad 38. Beta rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Beta rozdělení s parametry a, b s hustotou

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,\, b)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $a > 0$, $b > 0$ a $B(a,\, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$ je beta funkce v bodech a, b.

(i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku pro parametr $(a, b)^{\mathsf{T}}$.

Příklad 39. Dva výběry z normálního rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu_1, \sigma^2)$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Oba tyto výběry jsou na sobě nezávislé.

(i) Dokažte, že

$$S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{i=1}^{m} Y_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 \right)^{\mathsf{T}}$$

je postačující (suficientní) statistika.

(ii) Dokažte, že statistika $S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ není úplná.

Příklad 40. Useknuté Poissonovo rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z Poissonova rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda, K)$ useknutého zprava v neznámém bodě K, tj.

$$\mathsf{P}(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!\, C(K, \lambda)}, \quad x = 0, 1, \ldots, K, \quad \text{kde} \quad C(K, \lambda) = \sum_{i=0}^{K} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

kde $\lambda > 0$ a $K \in \mathbb{N}$ jsou neznámé parametry.

(i) Najděte postačující statistiku pro vektor neznámých parametrů $(\lambda, K)^{\mathsf{T}}$.

5 Využití postačujících (suficientních) statistik v teorii odhadu

Nechť rozdělení našich dat (reprezentovaných náhodnými vektory $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$) závisí na parametru $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\mathsf{T}$, který náleží do parametrického prostoru $\boldsymbol{\Theta}$.

Definice 4. Řekneme, že odhad $T = T(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$, jestliže pro každý jiný nestranný odhad $\widetilde{T} = \widetilde{T}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ platí, že

$$\mathsf{var}_{\boldsymbol{\theta}}(T) \leq \mathsf{var}_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{T}), \quad \text{pro každé} \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}.$$

Jak uvidíme níže, při hledání nejlepšího nestranného odhadu hrají důležitou úlohu úplné postačující statistiky. Ty se dají „snadno“ najít v tzv. exponenciálních systémech hustot.

Věta 3 (O exponenciálním systému)**.** *Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s hustotou exponenciálního typu, tj. s hustotou (vůči nějaké σ-konečné míře μ) tvaru*

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{\theta})\, h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} b_j(\boldsymbol{\theta}) R_j(\boldsymbol{x}) \right\},$$

kde $h(\boldsymbol{x}) \geq 0$ a $q(\boldsymbol{\theta}) > 0$. Předpokládejme, že množina $\{(b_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, b_p(\boldsymbol{\theta}))^\mathsf{T} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ obsahuje nedegenerovaný p-rozměrný interval. Dále nechť funkce $b_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, b_p(\boldsymbol{\theta})$ jsou affinně nezávislé. Položme

$$\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_p)^\mathsf{T}, \qquad \text{kde} \qquad S_j = \sum_{i=1}^{n} R_j(\boldsymbol{X}_i), \qquad j = 1, \ldots, p.$$

Potom $\boldsymbol{S}$ je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$.

Následující věta nám říká, že odhad můžeme „zlepšit“, pokud jej podmíníme postačující statistikou.

Věta 4 (Raova-Blackwellova věta)**.** *Nechť $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ je postačující statistika a nechť $a(\boldsymbol{\theta})$ je parametrická funkce, kterou chceme odhadnout. Nechť $T = T(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ je odhad takový, že $\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}} T^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Označme $U(\boldsymbol{S}) = \mathsf{E}\,[T|\boldsymbol{S}]$. Potom platí*

$$\mathsf{E}\, U(\boldsymbol{S}) = \mathsf{E}\, T, \qquad \mathsf{E}\left[T - a(\boldsymbol{\theta})\right]^2 \geq \mathsf{E}\left[U(\boldsymbol{S}) - a(\boldsymbol{\theta})\right]^2,$$

přičemž rovnost v poslední nerovnosti nastává právě tehdy, je-li $T = U(\boldsymbol{S})$ skoro jistě.

První Lehmannova-Scheffého věta věta nám pak říká, že pokud podmíníme nestranný odhad úplnou postačující statistikou, tak dostaneme nejlepší nestranný odhad.

Věta 5 (první Lehmannova-Scheffého věta)**.** *Předpokládejme, že $T = T(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ je nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$ takový, že $\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}} T^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Nechť $\boldsymbol{S}$ je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$. Definujme $U(\boldsymbol{S}) = \mathsf{E}\,[T|\boldsymbol{S}]$. Potom $U(\boldsymbol{S})$ je nejlepší nestranný odhad pro $a(\boldsymbol{\theta})$, a to jediný.*

Druhá Lehmannova-Scheffého věta nám zase říká, že pokud máme nestranný odhad, který je funkcí úplné postačující statistiky, pak se již jedná o nejlepší nestranný odhad.

Věta 6 (druhá Lehmannova-Scheffého věta)**.** *Nechť $\boldsymbol{S}$ je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$. Nechť g je funkce taková, že statistika $W = g(\boldsymbol{S})$ je nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$. Dále nechť $\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}} W^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Potom W je nejlepší nestranný odhad pro $a(\boldsymbol{\theta})$, a to jediný.*

Příklad 41. Geometrické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = p\,(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

kde $p \in (0, 1)$.

(i) Ukažte, že odhad $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 0\}$ je nestranný odhad parametru p.

(ii) Pomocí postačující statistiky $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ a Raovy-Blackwellovy věty „vylepšete“ odhad $T(\boldsymbol{X})$.

(iii) Je odhad nalezený ve (ii) nejlepší nestranný odhad parametru p?

(iv) Obdobně jako výše najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

Příklad 42. Speciální multinomické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z následující verze multinomického rozdělení

$$\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - 2\,p,$$

kde $p \in (0, \frac{1}{2})$.

(i) Ukažte, že odhad $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 1\}$ je nestranný odhad parametru p.

(ii) Ukažte, že $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \neq 0\}$ je postačující statistika pro parametr p.

(iii) Pomocí $S(\boldsymbol{X})$ a Raovy-Blackwellovy věty „vylepšete“ odhad $T(\boldsymbol{X})$.

(iv) Je odhad nalezený ve (iii) nejlepší nestranný odhad parametru p?

Příklad 43. Alternativní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

(i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru p.

(ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

Příklad 44. Poissonovo rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z Poissonovo rozdělení s parametrem λ.

(i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru λ.

(ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

(iii) Dosahuje rozptyl některého z výše uvedených odhadů příslušné dolní Raovy-Cramérovy meze?

Příklad 45. Normální rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{ -\tfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Uvažujte odhad $\widetilde{\sigma}_n = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

(i) Ukažte, že S_n^2 je nejlepší nestranný odhad parametru σ^2. Všimněte si, že tento odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze, viz Příklad 19.

(ii) Ukažte, že $\widetilde{\sigma}_n$ je nejlepší nestranný odhad σ.

(iii) Je výběrový medián nejlepší nestranný odhad parametru μ?

(iv) Ukažte, že $\overline{X}_n + u_\alpha\,\widetilde{\sigma}_n$ je nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $\mu + u_\alpha\,\sigma$.

(v) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce μ^2.

Příklad 46. „Curved normal“ $N(\mu,\mu^2)$

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp\Big\{ -\tfrac{(x-\mu)^2}{2\,\mu^2} \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu > 0.$$

Uvažujte, $T_1(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n$ a $T_2(\boldsymbol{X}) = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

(i) Ukažte, že $T_1(\boldsymbol{X})$ i $T_2(\boldsymbol{X})$ jsou nestrannými odhady μ a oba jsou funkcí minimální postačující statistiky.

(ii) Ukažte, že rozptyly odhadů $T_1(\boldsymbol{X})$ a $T_2(\boldsymbol{X})$ jsou různé.

Příklad 47. Odhad posunutí exponenciálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení

$$f(x;\delta) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(x-\delta)}, & x \in (\delta,\infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr a λ je **známé**.

(i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru δ.

(ii) Dosahuje odhad z (i) dolní Raovy-Cramérovy meze?

Nápověda: Najděte úplnou postačující statistiku a spočtěte její střední hodnotu.

Příklad 48. Odhad λ v exponenciálním rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x; \lambda) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

(i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru λ.

(ii) Dosahuje odhad nalezený v (i) dolní Raovy-Cramérovy meze?

(iii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce λ^k.

Nápověda pro (i): Hledejte odhad jako vhodný násobek odhadu $\frac{1}{\overline{X}_n}$. *Využijte toho, že* $\sum_{i=1}^n X_i$ *má Gama rozdělení s hustotou* $f(x) = \frac{\lambda^n\, x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

Příklad 49. Odhad θ v rovnoměrném rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(0, \theta)$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

(i) Je odhad $\widetilde{\theta}_n = 2\, \overline{X}_n$ nejlepší nestranný odhad parametru θ?

(ii) Pokud je odpověď v (i) záporná, tak najděte nejlepší nestranný odhad parametru θ.

(iii) Dosahuje odhad z (ii) dolní Raovy-Cramérovy meze?

Příklad 50. Obecné multinomické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $\mathsf{M}(1; p_1, \ldots, p_K)$, kde

$$\mathsf{P}\big(\boldsymbol{X}_1 = (x_1, \ldots, x_K)\big) = p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K},$$

kde

$$x_k \in \{0, 1\}, \qquad 0 < p_k < 1, \qquad k \in \{1, \ldots, K\},$$

a

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^K p_k = 1.$$

(i) Najděte úplnou postačující statistiku pro parametr $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)^\mathsf{T}$.

(ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{p}) = p_1\, p_2$.

6 Metoda maximální věrohodnosti - úvod

Nechť naše pozorování $\mathbf{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ mají sdruženou hustotu $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{\theta})$ (vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ), které závisí na neznámém p-rozměrném parametru $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^p$. Věrohodností pak rozumíme (náhodnou) funkci v parametru $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n; \boldsymbol{\theta}).$$

Maximálně věrohodný odhad definujeme jako

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}).$$

Zpravidla se odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ hledá jako argument maxima logaritmické věrohodnosti $L_n(\boldsymbol{\theta}) = \log \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$.Pokud je hustota $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{\theta})$ „dostatečně hladká“ v $\boldsymbol{\theta}$, pak odhad často hledáme jako řešení soustavy p věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}_p.$$

V mnoha aplikacích předpokládáme, že $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s hustotou $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ. Potom

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta}) \quad \text{a} \quad L_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Jednorozměrný parametr - asymptotické rozdělení

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ z rozdělení s hustotou $f(\boldsymbol{x}; \theta)$ vůči nějaké σ-konečné míře μ. Za určitých předpokladů regularity je odhad metodou maximální věrohodnosti asymptoticky normální a splňuje

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n - \theta_X\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(0, 1/J(\theta_X)\big), \tag{4}$$

kde $J(\theta)$ je Fisherova míra informace o parametru θ v (jednom) náhodném vektoru $\boldsymbol{X}_1$.

Tedy dostáváme, že asymptotický rozptyl (tj. rozptyl asymptotického rozdělení) maximálně věrohodného odhadu za podmínek regularity splňuje

$$\mathsf{avar}\big(\widehat{\theta}_n\big) = \tfrac{1}{n\,J(\theta_X)} = \tfrac{1}{J_n(\theta_X)},$$

kde $J_n(\theta)$ je Fisherova míra informace v celém náhodném výběru $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$.

Případy, že **nejsou splněny podmínky regularity**, se zpravidla dají poznat tak, že nosič rozdělení závisí na neznámém parametru. V takovém případě **nelze** při hledání maximálně věrohodného odhadu postupovat „standardně“ (tj. hledat kořen derivace logaritmické věrohodnosti, protože nelze derivovat podle neznámého parametru). Odhad se najde pak přímo vyšetřováním věrohodnosti, která je zpravidla monotónní v parametru.

Odhad transformovaného parametru. Někdy v aplikacích potřebujeme maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $g(\theta_X)$. Nechť $\widehat{\theta}_n$ je maximálně věrohodný odhad parametru θ_X. Potom dle Zehnaova principu invariance je $g(\widehat{\theta}_n)$ maximálně věrohodným odhadem parametrické funkce

$g(\theta_X)$. Navíc pokud $\widehat{\theta}_n$ splňuje (4) a g je spojitě diferencovatelná, pak asymptotické rozdělení $g(\widehat{\theta}_n)$ plyne z delta věty a platí

$$\sqrt{n}\,\big(g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta_X)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(0, [g'(\theta_X)]^2/J(\theta_X)\big).$$

Příklad 51. Alternativní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p a určete jeho asymptotické rozdělení.
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $p(1-p)$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
(iii) Porovnejte odhady z (i) a (ii) s nejlepším nestrannými odhady z příkladu 43. Dále porovnejte asymptotické rozptyly maximálně věrohodných odhadů s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 52. Poissonovo rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z Poissonovo rozdělení s parametrem λ.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru λ a určete jeho asymptotické rozdělení.
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $\mathrm{e}^{-\lambda}$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
(iii) Porovnejte odhady z (i) a (ii) s nejlepším nestranným odhady z příkladu 44 a s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 53. Exponenciální rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\lambda}_n$ parametru λ.
(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu odvozeného v (i).
(iii) Porovnejte odhad $\widehat{\lambda}_n$ s nejlepším nestranným odhadem z Příkladu 48. Dále porovnejte asymptotický rozptyl odhadu $\widehat{\lambda}_n$ s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 54. Geometrické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = p\,(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $p \in (0,1)$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p a určete jeho asymptotické rozdělení.
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $p(1-p)$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
(iii) Porovnejte tyto odhady s nejlepším nestrannými odhady z příkladu 41.

Příklad 55. Rovnoměrné rozdělení $\mathsf{R}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $\mathsf{R}\big(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\big)$ s hustotou

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ.

(ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).

Příklad 56. Rovnoměrné diskrétní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z rovnoměrného diskrétního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \frac{1}{M}, \qquad k = 1, 2, \ldots, M,$$

kde $M \in \mathbb{N}$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru M.

(ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).

Příklad 57. Normální rozdělení s různými středními hodnotami

Nechť $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\mathsf{T}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(\theta\, x_i, 1)$, kde θ je neznámý parametr a $x_1, \ldots, x_n$ jsou známé konstanty.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ.

(ii) Vyšetřete nestrannost odhadu z (i).

(iii) Dosahuje odhad dolní Raovy-Cramérovy meze?

Příklad 58. Podmíněné binomické rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z diskrétního rozdělení

$$\mathsf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{1 - (1-p)^m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ je známé celé číslo a $p \in (0, 1)$ je neznámý parametr.

(i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru p a odvoďte asymptotické rozdělení tohoto odhadu.

Příklad 59. Weibullovo rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Weibullova rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta\, x^{\theta - 1}\, \mathrm{e}^{-x^\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

(i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru θ a ukažte, že tato rovnice má právě jedno řešení.

(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 60. Logistické rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z logistického rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-(x-\theta)}}{\big(1+\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\big)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru θ a ukažte, že tato rovnice má právě jedno řešení.

(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 61. „Curved normal“ $\mathsf{N}(\theta, \theta^2)$

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\theta, \theta^2)$, kde $\theta > 0$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ.

(ii) Vyšetřete konzistenci odhadu z (i).

(iii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 62. Model jednoduché poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$, které splňují

$$\mathsf{P}(Y_1 = k \,|\, X_1) = \frac{[\lambda(X_1)]^k\, \mathrm{e}^{-\lambda(X_1)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(x) = \exp\{\beta\, x\}$ a rozdělení X_1 nezávisí na neznámém parametru β.

(i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru β a určete asymptotické rozdělení tohoto odhadu.

Příklad 63. Multinomické rozdělení (speciální případ)

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z následující verze multinomického rozdělení

$$\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - 2\,p,$$

kde $p \in (0, \frac{1}{2})$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p.

(ii) Určete asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 64. Dvojitě exponenciální rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z dvojtě exponenciálního (Laplaceova) rozdělení s hustotou $f(x;\theta) = \frac{1}{2}\, e^{-|x-\theta|}$, kde $\theta \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ.

7 Metoda maximální věrohodnosti - vektorový parametr

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory (veličiny) $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ z rozdělení s hustotou $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ vůči nějaké σ-konečné míře μ, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\mathsf{T}$ je neznámý parametr, jehož skutečná hodnota je $\boldsymbol{\theta}_X$. Potom za určitých předpokladů regularity (viz přednáška) je odhad metodou maximální věrohodnosti $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\theta}_{n,1}, \dots, \widehat{\theta}_{n,p})^\mathsf{T}$ asymptoticky normální a splňuje

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_X\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_p\big(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X)\big), \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova matice informace o parametru $\boldsymbol{\theta}$ v (jednom) náhodném vektoru (veličině) $\boldsymbol{X}_1$.

Odhad asymptotického rozptylu. Z asymptotické normality (5) vidíme, že asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu je v regulárních případech

$$\mathsf{avar}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \tfrac{1}{n}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X) = \boldsymbol{J}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X),$$

kde $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice v celém náhodném výběru $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$.

K tomu abychom mohli konstruovat intervaly (resp. množiny) spolehlivosti, potřebujeme konzistentní odhad Fisherovy informační matice $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$. Za předpokladů regularity z přednášky lze ukázat, že takovým konzistentním odhadem může být $\boldsymbol{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ nebo také tzv. *empirická (napozorovaná) Fisherova informační matice* v bodě $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$, tj.

$$\widehat{\boldsymbol{J}}_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = -\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}. \tag{6}$$

Tento odhad je zajímavý zejména tenkrát, když nejsme schopni dopočítat (teoretickou) Fisherovu informační matici $\boldsymbol{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$.

Konfidenční množina pro $\boldsymbol{\theta}_X$. Nechť $\widehat{\boldsymbol{J}}$ je nějaký konzistentní odhad $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}_X)$, tj.

$$\widehat{\boldsymbol{J}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}_X). \tag{7}$$

Konfidenční množinu *Waldovského typu* pro $\boldsymbol{\theta}_X$ s asymptotickým pokrytím $1-\alpha$ pak můžeme sestavit jako

$$\Big\{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} :\ n\,\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\big)^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{J}}\,\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\big) \leq \chi^2_p(1-\alpha)\Big\}, \tag{8}$$

kde $\chi^2_p(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2-rozdělení o p stupních volnosti.

Interval spolehlivosti pro $\theta_{X,k}$ (k-tou složku parametru $\boldsymbol{\theta}_X$). Označme $\widehat{\theta}_{n,k}$ k-tou složku maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ a nechť $\widehat{J}^{k,k}$ je k-tý diagonální prvek matice $\widehat{\boldsymbol{J}}^{-1}$ (tj. inverze odhadnuté Fisherovy informační matice). Za platnosti asymptotické normality max. věrohodného odhadu (5) a konzistence odhadu Fisherovy informační matice (7) má oboustranný intervalový odhad

$$\left(\widehat{\theta}_{n,k} - \tfrac{u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{J}^{k,k}}}{\sqrt{n}}, \widehat{\theta}_{n,k} + \tfrac{u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{J}^{k,k}}}{\sqrt{n}},\right) \tag{9}$$

asymptotickou spolehlivost $1-\alpha$. Analogicky můžeme sestavit dolní, resp. horní intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti $1-\alpha$.

Příklad 65. Normální rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}^2_n)^\mathsf{T}$ vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$.

(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
(iii) Na základě výsledků teorie maximální věrohodnosti sestavte oboustranný intervalový odhad pro parametr μ o asymptotické spolehlivosti $1-\alpha$. Porovnejte s přesným intervalem spolehlivost, který využívá t-rozdělení.
(iv) Odvoďte asymptotické rozdělení $\widehat{\mu}_n + u_\alpha \widehat{\sigma}_n$, což je odhad α-kvantilu rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Porovnejte asymptotický rozptyl odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 66. Lognormální rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}^2_n)^\mathsf{T}$ vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$.
(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
(iii) Sestavte asymptotickou konfidenční množinu pro parametr $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$.
(iv) Sestavte dolní (levostranný) intervalový odhad pro parametr μ o asymptotické spolehlivosti $1-\alpha$.

Příklad 67. Odhad posunutí a intenzity exponenciálního rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x; \lambda, \delta) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(x-\delta)}, & x \in [\delta, \infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(\delta, \lambda)^\mathsf{T}$.
(ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).
(iii) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(n\,(\widehat{\delta}_n - \delta) \leq x\big)$$

a pomocí tohoto výsledku určete limitní rozdělení odhadu $\widehat{\delta}_n$.

Příklad 68. Rovnoměrné rozdělení $\mathsf{R}(a, b)$

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $\mathsf{R}(a, b)$ s hustotou

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $a < b$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(a, b)^\mathsf{T}$.

(ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).

(iii) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(n\,(\widehat{b}_n - b) \leq x\big)$$
a pomocí tohoto výsledku určete limitní rozdělení odhadu $\widehat{b}_n$.

Příklad 69. Multinomické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $\mathsf{M}(1; p_1, \dots, p_K)$, kde
$$\mathsf{P}\big(\boldsymbol{X}_1 = (x_1, \dots, x_K)\big) = p_1^{x_1} \dots p_K^{x_K},$$
kde
$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad 0 < p_i < 1, \qquad i = 1, \dots, K,$$
a
$$\sum_{i=1}^{K} x_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{K} p_i = 1.$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_K)^{\mathsf{T}}$.

(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 70. Dvojčata

V roce 2012 bylo v ČR porozeno 1 987 dvojčat, z toho v 604 případech to byli dva chlapci a v 609 případech dvě dívky. Předpokládejte, že
$$\mathsf{P}(\text{dva chlapci}) = p, \quad \mathsf{P}(\text{dvě dívky}) = q,$$
$$\mathsf{P}(\text{první chlapec, druhá dívka}) = \mathsf{P}(\text{první dívka, druhý chlapec}).$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $\frac{2p}{1+p-q}$, která vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že se narodí dva chlapci, za předpokladu, že prvorozené dítě z dvojčat je chlapec.

(ii) Sestavte intervalový odhad pro $\frac{2p}{1+p-q}$.

Příklad 71. $Y|N$ je binomické

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(Y_1, N_1)^{\mathsf{T}}, \dots, (Y_n, N_n)^{\mathsf{T}}$ z diskrétního rozdělení
$$\mathsf{P}(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i}\, \frac{\lambda^j \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots;\, i = 0, 1, \dots, j.$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(p, \lambda)^{\mathsf{T}}$.

(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 72. Normální lineární regresní model

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $\binom{X_1}{Y_1}, \ldots, \binom{X_n}{Y_n}$. Nechť rozdělení Y_i podmíněno X_i je normální se střední hodnotou βX_i a rozptylem σ^2 (pro $i = 1, \ldots, n$). Nechť dále rozdělení X_i již nezávisí na parametrech β, σ^2 a $\mathsf{E}\, X_i^2 < \infty$ je konečná.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \sigma^2)^\mathsf{T}$.

(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \big(\widehat{\beta}_n, \widehat{\sigma}_n^2\big)^\mathsf{T}$ z (i).

(iii) Z (ii) odvoďte asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\beta}_n$.

(iv) Sestavte asymptotický intervalový odhad pro β o spolehlivosti $1 - \alpha$.

Příklad 73. Model logistické regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $\binom{\boldsymbol{X}_1}{Y_1}, \ldots, \binom{\boldsymbol{X}_n}{Y_n}$, kde

$$\mathsf{P}\big(Y_1 = 1 \,|\, \boldsymbol{X}_1\big) = \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{X}_1\}}{1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{X}_1\}}, \qquad \mathsf{P}\big(Y_1 = 0 \,|\, \boldsymbol{X}_1\big) = \frac{1}{1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{X}_1\}},$$

a rozdělení $\boldsymbol{X}_1$ nezávisí na neznámém vektorovém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\mathsf{T}$. Dále nechť $\mathsf{E}\, \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{X}_i\}}{(1+\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} \boldsymbol{X}_i\})^2} \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^\mathsf{T}$ je konečná regulární matice.

(i) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu parametru $\boldsymbol{\beta}$.

(ii) Sestavte oboustranný intervalový odhad pro parametr β_1.

Příklad 74. $Y|X$ je exponenciální

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \ldots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, y; \theta, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{x\,\theta\,\eta} \exp\big\{ -\frac{y}{x\,\theta} - \frac{x}{\eta} \big\}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta, \eta > 0$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\big(\widehat{\theta}_n, \widehat{\eta}_n\big)^\mathsf{T}$ vektorového parametru $(\theta, \eta)^\mathsf{T}$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.

(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\theta}_n$.

(iii) Sestavte (oboustranný) intervalový odhad pro parametr θ o (asymptotické) spolehlivosti $1-\alpha$.

(iv) Je odhad $\widehat{\theta}_n$ nejlepším nestranným odhadem parametru θ?

8 Neymanovo-Pearsonovo lemma a test poměrem věrohodnosti

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře ν. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_1$, kde $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_0$. Položme

$$T_n = \frac{\prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta}_1)}{\prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta}_0)},$$

a uvažujme test tvaru

$$T_n \geq c, \tag{10}$$

kde c je taková konstanta, aby test měl hladinu α. Potom Neymanovo-Pearsonovo lemma (Lemma 8.1 Anděl, 2011) říká, že tento test má největší sílu (tj. nejmenší pravděpodobnost chyby 2. druhu) mezi všemi testy s hladinou α. Za povšimnutí stojí, že $T_n = \frac{\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}_1)}{\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}_0)}$, kde $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je věrohodnost v bodě $\boldsymbol{\theta}$.

V případě, že rozdělení je diskrétní, tak zpravidla nelze najít c takové, aby test s kritickým oborem (10) měl předepsanou hladinu α. Teoreticky lze tento problém vyřešit pomocí tzv. „znáhodněných testů“ (Lemma 8.1 Anděl, 2011). V praxi se však znáhodněné testy příliš nepoužívají. Spíše se v takovém případě hledá takové c, aby test s kritickým oborem (10) měl hladinu co nejbližší α, nicméně menší než (nebo rovnou) α.

Test poměrem věrohodnosti. Uvažujme nyní obecnější hypotézy

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \boldsymbol{\Theta}_0, \quad H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \in \boldsymbol{\Theta}_1, \quad \text{kde } \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1.$$

Inspirováni Neymanovou-Pearsonovou větou uvažujme testovou statistiku ve tvaru

$$\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{\theta})} = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}.$$

Jelikož proti nulové hypotéze budou svědčit hodnoty testové statistiky, které jsou dostatečně větší než jedna, tak se nabízí uvažovat následující testovou statistiku

$$\widetilde{T}_n = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\mathcal{L}_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\mathcal{L}_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)},$$

kde $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ (bez předpokladu o platnosti nulové hypotézy) a $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je maximálně věrohodný odhad za předpokladu platnosti nulové hypotézy.

V praxi se pak zpravidla používá testová statistika

$$LR_n = 2 \log \widetilde{T}_n = 2\big(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\big),$$

protože za jistých předpokladů regularity (viz přednáška) má tato statistika za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ^2-rozdělení o $\dim(\boldsymbol{\Theta}) - \dim(\boldsymbol{\Theta}_0)$ stupních volnosti.

Jednorozměrný parametr. Uvažujme $\theta_X \in \mathbb{R}$ a test hypotézy

$$H_0 : \theta_X = \theta_0, \qquad H_1 : \theta_X \neq \theta_0.$$

V tomto případě má testová statistika tvar

$$LR_n = 2\left(L_n(\widehat{\theta}_n) - L_n(\theta_0)\right),$$

a za platnosti nulové hypotézy má asymptoticky χ^2-rozdělení o jednom stupni volnosti.

Příklad 75. Poissonovo rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ.

(i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \qquad H_1 : \lambda_X = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1 > \lambda_0$. Závisí tento test na konkrétní hodnotě λ_1?

(ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $\lambda_1 < \lambda_0$?

(iii) Odhadněte λ metodou maximální věrohodnosti a na základě asymptotického rozdělení tohoto odhadu sestavte test hypotéz

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \qquad H_1 : \lambda_X \neq \lambda_0.$$

(iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 76. Alternativní rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p.

(i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : p_X = p_0, \qquad H_1 : p_X = p_1,$$

Kde $p_1 > p_0$. Závisí tento test na konkrétní hodnotě p_1?

(ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $p_1 < p_0$?

(iii) Odhadněte parametr p metodou maximální věrohodnosti, odvoďte jeho rozdělení a sestavte test hypotéz

$$H_0 : p_X = p_0, \qquad H_1 : p_X \neq p_0.$$

(iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 77. Exponenciální rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x; \lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\}$.

(i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \qquad H_1 : \lambda_X = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1 > \lambda_0$. Závisí tento test na konkrétní hodnotě λ_1?

(ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $\lambda_1 < \lambda_0$?

(iii) Odhadněte λ metodou maximální věrohodnosti, odvoďte jeho asymptotické rozdělení a sestavte test hypotéz

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \qquad H_1 : \lambda_X \neq \lambda_0.$$

(iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 78. Normální rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozelění $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : \mu_X = \mu_0, \qquad H_1 : \mu_X \neq \mu_0.$$

Porovnejte tento test s (přesným) jednovýběrovým t-testem.

(ii) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2.$$

Porovnejte tento test s přesným testem založeným na statistice $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}$.

(iii) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : (\mu_X, \sigma_X^2)^\top = (\mu_0, \sigma_0^2)^\top, \qquad H_1 : (\mu_X, \sigma_X^2)^\top \neq (\mu_0, \sigma_0^2)^\top.$$

Příklad 79. Multinomické rozdělení

Níže uvedená tabulka zachycuje počet živě narozených dětí v ČR v roce 2008 dle čtvrtletí.

Čtvrtletí	1	2	3	4
Počet	28 737	30 871	31 915	28 047

(i) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte je pro všechna čtvrtletí stejná?

Příklad 80. Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium

V nějaké populaci se určitý gen vyskytuje ve dvou variantách (alelách) A (např. tmavé oči) a a (např. světlé oči). Mezi všemi geny v celé populaci tvoří alela A podíl $\theta_X \in (0, 1)$ a alela a podíl $1 - \theta_X$. Každý jedinec má dva exempláře příslušného genu (jeden po otci, jeden po matce). Pokud se geny míchají nezávisle (platí tzv. Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium), pravděpodobnosti tří možných variant genotypu jedince jsou:

Genotyp	Pravděpodobnost
AA	θ_X^2
Aa	$2\theta_X(1 - \theta_X)$
aa	$(1 - \theta_X)^2$

Pozorujeme genotypy n nezávislých jedinců a označíme X_1, X_2, X_3 počty jedinců s genotypem (po řadě) AA, Aa, aa. Platí-li Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium, pak vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ má rozdělení $\mathsf{Mult}_3(n, \boldsymbol{p}(\theta_X))$, kde $\boldsymbol{p}(\theta_X) = (\theta_X^2, 2\theta_X(1 - \theta_X), (1 - \theta_X)^2)^\top$. Na základě pozorování $\boldsymbol{X}$ testujte, zdali se populace nachází v Hardyho-Weinbergově ekvilibriu.

Příklad 81. Model poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\boldsymbol{X}_1^\top, Y_1)^\top, \dots, (\boldsymbol{X}_n^\top, Y_n)^\top$, kde $\boldsymbol{X}_1$ je q-rozměrný náhodný vektor. Nechť naše pozorování splňují model

$$\mathsf{P}(Y_1 = k \mid \boldsymbol{X}_1) = \frac{[\lambda(\boldsymbol{X}_1)]^k \, \mathrm{e}^{-\lambda(\boldsymbol{X}_1)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(\boldsymbol{x}) = \exp\{\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}\}$ a rozdělení $\boldsymbol{X}_1$ nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_q)^\top$.

(i) Sestavte test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}_q$ proti alternativě, že $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}_q$.

(ii) Proveďte test pro následující data, kde Y_i je počet bakterií, X_{i1} je množství světla a X_{i2} teplota.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_{1i}	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4
X_{2i}	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
Y_i	1	0	1	0	2	1	1	4	3	4	4

Příklad 82. Pruská armáda a Poissonovo rozdělení

Následující tabulka udává počet úmrtí v důsledku kopnutí koně v deseti sborech pruské armády v rámci 20 let.

Počet úmrtí	0	1	2	3	4	5 a více
Pozorovaná četnost	109	65	22	3	1	0

Dá se počet úmrtí v důsledku kopnutí koně (v jednom sboru za jeden rok) považovat za náhodný výběr z Poissonova rozdělení?

Příklad 83. Barva očí

Následující tabulka udává barvu očí otců a synů, kde
SM . . . světle modrá,
MZ nebo Š . . . modrozelená nebo šedá
TŠ nebo SH . . . tmavě šedá nebo světle hněda
TH . . . tmavě hnědá

	Otec			
Syn	SM	MZ nebo Š	TŠ nebo SH	TH
SM	194	70	41	30
MZ nebo Š	83	124	41	36
TŠ nebo SH	25	34	55	23
TH	6	36	43	109

(i) Otestujte, že barva očí u synů a otců je nezávislá.

(ii) Otestujte hypotézu symetrie, tj. že pro pravděpodobnosti v tabulce platí $p_{ij} = p_{ji}$ pro všechna i, j.

9 Metoda maximální věrohodnosti - asymptotické testy (bez rušivých parametrů)

Asymptotické testy pro vektorový parametr

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\mathsf{T}$ je neznámý parametr. Nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \neq \boldsymbol{\theta}_0$ můžeme testovat pomocí Waldova testu, Raova skórového testu nebo testu poměrem věrohodnosti.

Podobně jako dříve označme $L_n(\boldsymbol{\theta})$ logaritmickou věrohodnost a $\boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ derivaci logaritmické věrohodnosti. Dále nechť $\widehat{\boldsymbol{J}}$ je za nulové hypotézy konzistentní odhad $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Definujme následující testové statistiky

$$W_n = n\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\big)^\mathsf{T} \widehat{\boldsymbol{J}}\,\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\big) \qquad \text{(Waldův test)},$$

$$R_n = \frac{1}{n}\,[\boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{\theta}_0)]^\mathsf{T} \widehat{\boldsymbol{J}}^{-1} \boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{\theta}_0) \qquad \text{(Raův skórový test)},$$

$$LR_n = 2\,\big(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\boldsymbol{\theta}_0)\big) \qquad \text{(Test poměrem věrohodnosti)}.$$

Ve Waldově testu se jako odhad $\widehat{\boldsymbol{J}}$ používá $\boldsymbol{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ nebo empirická Fisherova informační matice v bodě $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$, viz (6). Na druhou stranu v Raově skórovém testu se používá zpravidla $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}_0)$ nebo empirická Fisherova informační matice v bodě $\boldsymbol{\theta}_0$. Tato volba má výhodu v tom, že můžeme provést test, aniž bychom potřebovali spočítat $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$.

Test poměrem věrohodnosti nevyžaduje odhad (a ani výpočet) Fisherovy informační matice.

Pokud platí určité předpoklady regularity (viz např. kapitola 7.6.5 knihy Anděl, 2011), pak za platnosti nulové hypotézy mají všechny tři výše uvedené statistiky asymptoticky χ^2-rozdělení o p stupních volnosti. Proti nulové hypotéze svědčí velké hodnoty testových statistik, tudíž zamítáme pokud příslušná testová statistika překročí $(1-\alpha)$-kvantil χ^2-rozdělení o p stupních volnosti.

Jednorozměrný parametr θ

Pro test $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$ můžeme tedy použít

$$W_n = n\big(\widehat{\theta}_n - \theta_0\big)^2\,\widehat{J} \qquad \text{(Waldův test)},$$

$$R_n = \frac{[U_n(\theta_0)]^2}{n\,\widehat{J}} \qquad \text{(Raův skórový test)},$$

$$LR_n = 2\,\big(L_n(\widehat{\theta}_n) - L_n(\theta_0)\big) \qquad \text{(Test poměrem věrohodnosti)}.$$

Za platnosti nulové hypotézy pak mají všechny výše uvedené testové statistiky (za platnosti jistých předpokladů regularity) asymptoticky χ^2-rozdělení o 1 stupni volnosti.

Jednostranné testy

Testujme nyní $H_0 : \theta_X \leq \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X > \theta_0$. V tomto případě je nejjednodušší využít přirozenou modifikace Waldova test, která vede ke kritickému oboru

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n - \theta_0\big)\sqrt{\widehat{J}} \geq u_{1-\alpha}.$$

Příklad 84. Alternativní rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p.$$

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $p = p_0$ proti oboustranné alternativě $p_X \neq p_0$.

Příklad 85. Poissonovo rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \frac{\lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\lambda_X = \lambda_0$ proti oboustranné alternativě $\lambda_X \neq \lambda_0$.

Příklad 86. Podmíněné Poissonovo rozdělení

Následující tabulka zachycuje počet úrazů v dané továrně během určitého období. Jelikož se do úrazové evidence dostali pouze ti, kteří měli alespoň jeden úraz, tak počet zaměstnanců, kteří neměli žádný úraz je neznámý.

Počet úrazů	1	2	3	4	5
Počet zaměstnanců	2039	312	35	3	1

Předpokládáme, že počet úrazů pro zaměstnance, který měl alespoň jeden úraz se řídí rozdělením

$$\mathsf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \, \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(i) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu parametru λ.
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad pravděpodobnosti, že daný zaměstnanec nemá žádný úraz a odvoďte asymptotické rozdělení tohoto odhadu.
(iii) V minulém období nemělo 75 % zaměstnanců během daného období žádný úraz. Můžeme říct, že i letošní data jsou v souladu s tímto tvrzením?
(iv) Jaký podíl zaměstnanců bez úrazu by byl v souladu s našimi daty?

Příklad 87. Exponenciální rozdělení

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$.

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\lambda_X = \lambda_0$ proti oboustranné alternativě $\lambda_X \neq \lambda_0$.

Příklad 88. Geometrické rozdělení

Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ z geometrického rozdělení tj.

$$\mathsf{P}(X_i = k) = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

kde $p \in (0,1)$ je neznámý parametr.

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $p_X = p_0$ proti oboustranné alternativě $p_X \neq p_0$.

Příklad 89. Regrese v exponenciálním rozdělení

Nechť $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory a podmíněné rozdělení Y při daném X je dáno hustotou

$$f_{Y|X}(y|x;\beta) = \beta\, x \exp\big\{-\beta\, x\, y\big\}\, \mathbb{I}\{y > 0\},$$

kde $\beta > 0$ je neznámý parametr. Dále předpokládejme, že hustota rozdělení X (vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ) nezávisí na β.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr β.

(ii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu, že $\beta_X = \beta_0$ proti oboustranné alternativě $\beta_X \neq \beta_0$.

Příklad 90. Model jednoduché poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$, které splňují

$$\mathsf{P}(Y_1 = k \,|\, X_1) = \frac{[\lambda(X_1)]^k\, \mathrm{e}^{-\lambda(X_1)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(x) = \exp\{\beta\, x\}$ a rozdělení X_1 nezávisí na neznámém parametru β.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad pro parametrickou funkci e^β.

(ii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\beta_X = \beta_0$ proti oboustranné alternativě $\beta_X \neq \beta_0$.

(iii) Sestavte interval spolehlivosti pro β.

(iv) Sestavte interval spolehlivosti pro e^β.

Příklad 91. Logistické rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z logistického rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-(x-\theta)}}{\big(1 + \mathrm{e}^{-(x-\theta)}\big)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{kde } \theta \in \mathbb{R}.$$

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\theta_X = \theta_0$ proti oboustranné alternativě $\theta_X \neq \theta_0$.

Příklad 92. Normální rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

(i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(\mu, \sigma^2)^\mathsf{T} = (0, 1)^\mathsf{T}$ proti $(\mu, \sigma^2)^\mathsf{T} \neq (0, 1)^\mathsf{T}$.

Příklad 93. Současný odhad obou parametrů v lognormálním rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)^\mathsf{T}$ vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$.

(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

(iii) Sestavte asymptotickou konfidenční množinu pro parametr $\boldsymbol{\theta}_X = (\mu_X, \sigma_X^2)^\mathsf{T}$.

(iv) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(\mu_X, \sigma_X)^\mathsf{T} = (0, 1)^\mathsf{T}$ proti $(\mu_X, \sigma_X)^\mathsf{T} \neq (0, 1)^\mathsf{T}$.

Příklad 94. Model paraboly procházející počátkem

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ takové, že $Y_i | X_i$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(\beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2, 1)$ a rozdělení X_i nezávisí na parametrech β_1, β_2.

(i) Najděte Raův skórový test nulové hypotézy $H_0 : (\beta_1, \beta_2)^\mathsf{T} = (0, 0)^\mathsf{T}$ proti alternativě, že $H_1 : (\beta_1, \beta_2)^\mathsf{T} \neq (0, 0)^\mathsf{T}$.

Příklad 95. $Y|N$ je binomické

Uvažujme nezávislé a stejně rozdělené náhodné vektory $(Y_1, N_1)^\top, \dots, (Y_n, N_n)^\top$ z diskrétního rozdělení

$$P(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!},$$

pro $j = 0, 1, \dots,$ $i = 0, 1, \dots, j$ a $\lambda > 0$.

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(p, \lambda)^\mathsf{T}$.

(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

(iii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(p_X, \lambda_X)^\top = (p_0, \lambda_0)^\top$ proti oboustranné alternativě $(p_X, \lambda_X)^\top \neq (p_0, \lambda_0)^\top$.

10 Metoda maximální věrohodnosti - asymptotické testy s rušivými parametry

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ (vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ), kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\mathsf{T}$ je neznámý parametr a $\boldsymbol{\theta}_X$ je jeho skutečná hodnota. Často je naším cílem testovat nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \boldsymbol{\Theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \setminus \boldsymbol{\Theta}_0$, kde $\boldsymbol{\Theta}_0$ je podmnožina parametrického prostoru $\boldsymbol{\Theta}$. Test poměrem věrohodnosti pro tuto situaci lze psát ve tvaru

$$LR_n^* = 2\left(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\right), \tag{11}$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ je maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy, tj.

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} L_n(\boldsymbol{\theta}).$$

Za platnosti nulové hypotézy a předpokladů regularity platí, že statistika LR_n^* má asymptoticky χ^2-rozdělení o stupních volnosti $\dim(\boldsymbol{\Theta}) - \dim(\boldsymbol{\Theta}_0)$.

Za povšimnutí stojí také, že na rozdíl od testů uvedených dále, test poměrem věrohodnosti nevyžaduje odhad (a ani výpočet) Fisherovy informační matice.

V následujícím se zaměříme na speciální případ, kdy chceme testovat jenom q složek ($1 \leq q < p$) vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se jedná o prvních q složek vektoru $\boldsymbol{\theta}$ (jinak si složky můžeme přeuspořádat). Tyto složky si označíme jako $\boldsymbol{\tau}$. Zbylých $p - q$ složek označíme jako $\boldsymbol{\psi}$ a budeme je označovat jako rušivé parametry. Tj. můžeme psát $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi})$ a testujeme

$$H_0 : \boldsymbol{\tau}_X = \boldsymbol{\tau}_0 \text{ proti alternativě } H_1 : \boldsymbol{\tau}_X \neq \boldsymbol{\tau}_0, \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{\psi}$ může být libovolné.

Označme $\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n$ prvních q složek maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ a uvědomme si, že v tomto případě lze maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ psát ve tvaru

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = (\boldsymbol{\tau}_0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_n), \quad \text{kde} \quad \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\psi}} L_n(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\psi}).$$

Nechť $\boldsymbol{U}_{1n}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial L_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ a $\widehat{\boldsymbol{J}}$ je odhad Fisherovy informační matice v jedné veličině $\boldsymbol{X}_1$, který je konzistentní za nulové hypotézy.

Pro testování hypotéz (12) pak můžeme využít test poměrem věrohodnosti (11) nebo některý z následujících testů

$$W_n^* = n\left(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n - \boldsymbol{\tau}_0\right)^\mathsf{T} \left[\widehat{\boldsymbol{J}}^{11}\right]^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n - \boldsymbol{\tau}_0\right), \qquad \text{(Waldův test)},$$

$$R_n^* = \frac{1}{n} \boldsymbol{U}_{1n}^\mathsf{T}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\, \widehat{\boldsymbol{J}}^{11}\, \boldsymbol{U}_{1n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \qquad \text{(Raův skórový test)},$$

kde $\widehat{\boldsymbol{J}}^{11}$ je levý horní $(q, q)-$blok matice $\widehat{\boldsymbol{J}}^{-1}$ (tj. inverze odhadu Fisherovy informační matice). Všechny testové statistiky mají za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ^2-rozdělení o q stupních volnosti.

Jednorozměrné τ_X (tj. $q = 1$). Často je parametr, který chceme testovat jednorozměrný. V tomto případě je pro Waldův test přirozené používat testovou statistiku $\frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\tau}_n - \tau_0\right)}{\sqrt{\widehat{J}^{11}}}$, kde $\widehat{J}^{11}$ je první diagonální prvek matice $\widehat{\boldsymbol{J}}^{-1}$. Výhodou této testové statistiky je, že se dá snadno využít i pro testování jednostranných hypotéz.

Odhad Fisherovy informační matice. Jako $\widehat{\boldsymbol{J}}$ se ve Waldově testu nejčastěji používá

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}\big(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n\big) \qquad \text{nebo} \qquad \widehat{\boldsymbol{J}} = -\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}.$$

V Raově skórovém testu se pak nejčastěji používá

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}\big(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n\big) \qquad \text{nebo} \qquad \widehat{\boldsymbol{J}} = -\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\mathsf{T}}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n}.$$

Příklad 96. Normální rozdělení

Uvažujme náhodný výběr $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ z normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, kde oba parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé. Příslušná hustota rozdělení má tvar

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ proti alternativě $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Příklad 97. Lognormální rozdělení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ proti alternativě $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Příklad 98. $Y|N$ je binomické

Předpokládejme, že náhodný výber $(Y_1, N_1)^\mathsf{T}, \ldots, (Y_n, N_n)^\mathsf{T}$ je generován z diskrétního rozdělení

$$\mathsf{P}(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i}\, \frac{\lambda^j \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots ; i = 0, 1, \ldots, j.$$

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : p = p_0$ proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$.

Příklad 99. Multinomické rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $\mathsf{Mult}_4(1; p_1, p_2, p_3, p_4)$, kde

$$\mathsf{P}\big(\boldsymbol{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot p_4^{x_4},$$

kde

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad 0 < p_i < 1, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

a platí, že

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti a Waldův test hypotézy $H_0 : p_1 = \frac{1}{4}$ proti alternativě $H_1 : p_1 \neq \frac{1}{4}$.

(ii) Jak by vypadal test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : p_1 = p_2$ proti alternativě $H_1 : p_1 \neq p_2$?

(iii) Jak by vypadal test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : p_3 = 1.1\,p_1$ proti alternativě $H_1 : p_3 \neq 1.1\,p_1$?

Příklad 100. Multinomické rozdělení

Níže uvedená tabulka zachycuje počet živě narozených dětí v ČR v roce 2008 dle čtvrtletí.

Čtvrtletí	1	2	3	4
Počet	28 737	30 871	31 915	28 047

Na základě testů odvozených v příkladu 99 zodpovězte následující otázky.

(i) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí je $\frac{1}{4}$?

(ii) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí je stejná jako pravděpodobnost narození dítěte ve druhém čtvrtletí?

(iii) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte ve třetím čtvrtletí je o 10 procent (tj. 1.1-krát) větší než pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí?

Příklad 101. Lineární model přímky

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \ldots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ takové, že podmíněné rozdělení $Y_i | X_i$ je normální rozdělení $\mathsf{N}(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$ a X_i má rozdělení s hustotou $f_X(x)$, která nezávisí na neznámých parametrech β_0, β_1 a σ^2.

(i) Najděte test poměrem věrohodnosti nulové hypotézy $H_0 : \beta_1 = 0$ proti alternativě, že $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Příklad 102. Regrese v exponenciálním rozdělení

Nechť náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory. Y_1 za podmínky $X_1 = x$ má exponenciální rozdělení s hustotou

$$f_{Y|X}(y|x; \alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta, x) \exp\big\{ -\lambda(\alpha, \beta, x)\, y\big\}\, \mathbb{I}\{y > 0\},$$

kde $\lambda(\alpha, \beta, x) = \mathrm{e}^{\alpha+\beta\, x}$ a α, β jsou neznámé parametry. Dále předpokládejme, že rozdělení X_1 nezávisí na parametrech α a β.

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy nulové hypotézy $\beta = 0$ proti oboustranné alternativě $\beta \neq 0$.

(ii) Sestavte dolní intervalový odhad pro parametr β.

(iii) Sestavte intervalový odhad pro parametr $\theta = \mathrm{e}^{\beta}$.

Y může v tomto případě například značit dobu do poruchy určité součástky a X maximální teplotu, které bylo dosaženo při výrobním procesu této součástky. Povšimněte si, že za nulové hypotézy jsou X a Y nezávislé.

Příklad 103. Test symetrie v tabulce 2x2

Nechť náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé náhodné vektory z následujícího dvourozměrného rozdělení

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_1 = 0, Y_1 = 0) &= p_{00}, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1, Y_1 = 0) = p_{10}, \\ \mathsf{P}(X_1 = 0, Y_1 = 1) &= p_{01}, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1, Y_1 = 1) = p_{11}, \end{aligned}$$

kde $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$ a $p_{ij} \in (0, 1)$ pro všechna $k, j \in \{0, 1\}$.

(i) Sestavte test poměrem věrohodnosti nulové hypotézy $H_0 : p_{01} = p_{10}$ proti oboustranné alternativě $H_1 : p_{01} \neq p_{10}$.

Příklad 104. Model poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\boldsymbol{X}_1^\mathsf{T}, Y_1)^\mathsf{T}, \ldots, (\boldsymbol{X}_n^\mathsf{T}, Y_n)^\mathsf{T}$, kde $\boldsymbol{X}_1$ je q-rozměrný náhodný vektor. Nechť naše pozorování splňují model

$$\mathsf{P}(Y_1 = k \,|\, \boldsymbol{X}_1) = \frac{[\lambda(\boldsymbol{X}_1)]^k\, \mathrm{e}^{-\lambda(\boldsymbol{X}_1)}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $\lambda(\boldsymbol{x}) = \exp\{\alpha + \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\}$ a rozdělení $\boldsymbol{X}_1$ nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^\mathsf{T}$.

(i) Sestavte Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}_q$ proti alternativě, že $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}_q$.

(ii) Proveďte test numericky pro data z (ii) z příkladu 81. Spočtěte také intervalový odhad o spolehlivosti 0.95 pro parametr β_1.

Příklad 105. Model jednoduché logistické regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \ldots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$, kde

$$\mathsf{P}(Y_1 = 1 \,|\, X_1) = \frac{\exp\{\alpha + \beta\, X_1\}}{1 + \exp\{\alpha + \beta\, X_1\}}, \qquad \mathsf{P}(Y_1 = 0 \,|\, X_1) = \frac{1}{1 + \exp\{\alpha + \beta\, X_1\}},$$

a rozdělení X_1 nezávisí na neznámých parametrech α a β.

(i) Sestavte test nulové hypotézy $H_0 : \beta = 0$ proti alternativě, že $H_1 : \beta \neq 0$.

(ii) Spočítejte p-hodnotu na základě dat v tabulce, kde X_i je hmotnost a Y_i je indikátor, zda dotyčný má vysoký tlak. Spočítejte také interval spolehlivosti pro parametr β.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	70	85	76	59	92	102	65	87	73	102
Y_i	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1

11 Další příklady na teorii maximální věrohodnosti

Příklad 106. Minimální životnost

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$. Na základě znalosti pouze $X_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} X_i$ najděte maximálně věrohodný odhad parametru λ. Je tento odhad konzistentní?

Příklad 107. Rovnoměrné rozdělení v $\mathbb{R}^2$

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\mathsf{T}, \dots, (X_n, Y_n)^\mathsf{T}$ z nějakého rozdělení F.

(i) Odhadněte parametr θ za předpokladu, že F je rovnoměrné rozdělení na kruhu se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem θ.

(ii) Odhadněte parametr θ za předpokladu, že F je rovnoměrné rozdělení na čtverci $(-\theta, \theta)^2$.

Příklad 108. Odhad pravděpodobnosti narození chlapce

(A) Mějme následující informaci o počtu chlapců v rodinách s dvěma dětmi.

počet chlapců k	0	1	2
počet rodin $n_k^{(2)}$	42 860	89 213	47 819

Odhadněte pravděpodobnost narození chlapce v této populaci metodou maximální věrohodnosti za předpokladu, že rozdělení počtu chlapců v rodině se řídí binomickým rozdělením.

(B) Jak se odhad změní, máme-li k dispozici informaci o počtu chlapců v rodinách s dvěma, respektive s šesti, dětmi, a chceme využít informaci o všech dostupných datech. Předpokládejte opět, že rozdělení počtu chlapců se řídí binomickým rozdělením.

počet chlapců k	0	1	2	3	4	5	6
počet rodin $n_k^{(2)}$	42 860	89 213	47 819				
počet rodin $n_k^{(6)}$	1 096	6 233	15 700	22 221	17 332	7 908	1 579

Zformulujte model, sestavte věrohodnostní funkci a napište, jak byste ji řešili.

Pozn. Index $\{\dots\}^{(2)}$, resp. $\{...\}^{(6)}$, značí, zda se data týkají rodin se dvěma, resp. šesti, dětmi.

Reference

Anděl, J. (2011). *Základy matematické statistiky*. MatfyzPress.

---

12 Výsledky některých příkladů

Příklad 1

(i) $\mathsf{E}\,(XY \mid X = x\,) = \frac{x(3x+2)}{3(2x+1)}$, pro $x \in (0,1)$.

Příklad 2

(i) $\mathsf{E}\big[\frac{Y}{X^2}|X\big] = 2\,X$.

(ii) $\mathsf{E}\,\frac{Y}{X^2} = 1$.

(iii) $\mathsf{E}\,Y = \frac{1}{4}$.

(iv) $\mathsf{var}(Y) = \frac{37}{28}$.

Příklad 3

(i) $\mathsf{E}\big(Y \,\big|\, X = t\big) = t$ pro $t \in (1,2)$ a $\mathsf{E}\big(Y \,\big|\, X\big) = X$.

(ii) $\mathsf{E}\Big(Y \,\Big|\, \log\big(\frac{X-1}{2-X}\big) = t\Big) = \frac{2\exp\{t\}+1}{\exp\{t\}+1}$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a $\mathsf{E}\Big(Y \,\big|\, \log\big(\frac{X-1}{2-X}\big)\Big) = X$.

(iii) $\mathsf{E}\Big[\frac{Y}{X^6} \,\big|\, \log\big(\frac{X-1}{2-X}\big)\Big] = \frac{1}{X^5}$.

Příklad 4

(i) $\mathsf{E}\Big[911\,X - \log\big(\frac{Y}{1-Y}\big) \,\big|\, Y\Big] = 911\,\big(Y + \frac{1}{2}\big) + \log\big(\frac{Y}{1-Y}\big)$

Příklad 5

(i) $\mathsf{E}\big(X + Y \,\big|\, X\big) = X + \mathsf{E}\,Y$.

(ii) $\mathsf{E}\big(X + Y \,\big|\, X\big) = X + \mathsf{E}\big(Y \,\big|\, X\big)$.

(iii) $\mathsf{E}\big(X \,\big|\, X + Y\big) = \frac{X+Y}{2}$.

Příklad 6

(i) $\mathsf{E}\big[Y|\exp\{X\}\big] = \frac{X^2+1}{2}$.

(ii) $\mathsf{E}\,Y = 1$.

(iii) $\mathsf{var}(Y) = 1$.

Příklad 9

(i) $\mathsf{E}\left(X_1 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n \right) = X_1$.

(ii) $\mathsf{E}\left(X_1 \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} \right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(iii) $\mathsf{E}\left(h_1(X_1) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} \right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_1(X_{(i)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_1(X_i)$.

(iv) $\mathsf{E}\left(h_2(X_1, X_2) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} \right) = \frac{1}{n(n-1)}\sum\sum_{i \neq j} h_2(X_i, X_j)$.

(v) $\mathsf{E}\left(h_2(X_1, X_2) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} \right) = \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum\sum_{i < j} h_2(X_i, X_j)$.

Příklad 10

(i) $J(\theta) = \frac{2}{1+\rho}$.

Příklad 11

(i) $J(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) $J_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$.

(iii) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ je nestranným odhadem parametrické funkce $g(\lambda) = 2\,\lambda$ a dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze (tj. je eficientní).

(iv) Odhad $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 13

(i) $J(\sigma) = \frac{2}{\sigma^2}$.

(ii) $J(\sigma^2) = \frac{1}{2\,\sigma^4}$.

Příklad 14

(i) Odhad S_n^2 nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze (dosahuje jí však asymptoticky).

(ii) Odhad T_n dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Odhad $\widehat{\sigma}_n$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iv) $c = \dfrac{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Odhad $\widetilde{\sigma}_n$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze (dosahuje jí však asymptoticky).

Příklad 15

(iii) Systém hustot není regulární.

Příklad 16

Odhad $\widehat{p}_n$ je nestranný a dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 17

(i) Odhad je nestranný pro $c = \frac{1}{2n}$.

(ii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 18

(ii) Odhad $T_3(\boldsymbol{X})$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze. Ta je v tomto případě $\frac{\mu^2}{3\,n}$. Nicméně eficience (tj. podíl Raovy-Cramérovy meze a rozptylu odhadu $T_3(\boldsymbol{X})$) se blíží s rostoucím rozsahem výběru k jedné, viz následující tabulka:

n	10	50	100	200	300
Eficience	0.918	0.983	0.992	0.996	0.997

Příklad 19

(i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{bmatrix}$

(ii) Odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

(iv) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 21

(i) Systém hustot není regulární.

Příklad 23

(i) Dolní Raova-Cramérova mez je $\frac{2\sigma^4}{n_1+n_2}$.

(ii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérovy meze.

Příklad 25

(i) Pro $\rho < 1$ není $\overline{X}_n$ nejlepší nestranný odhad parametru θ.

(ii) $\frac{1}{2}(\overline{X}_n + \overline{Y}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametru θ.

Příklad 29

(i) $\boldsymbol{X}$ je postačující.

(ii) $\big(|X_1|, \ldots, |X_n|\big)^\mathsf{T}$ je postačující.

(iii) $\sum_{i=1}^n X_i$ není postačující.

(iv) $\sum_{i=1}^n |X_i|$ není postačující.

(v) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ je postačující.

(vi) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ je postačující.

(vii) $\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2, X_n^2\big)^\mathsf{T}$ je postačující.

Příklad 31

(i) $S(\boldsymbol{X}) = \big(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\big)^\mathsf{T}$

Příklad 35

(i) $\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)^\mathsf{T}$

(ii) Statistika z (i) není úplná.

Příklad 38

(i) $\left(\sum_{i=1}^n \log(X_i), \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)\right)^\mathsf{T}$

Příklad 39

(ii) Uvažte statistiku $S_X^2 - S_Y^2$.

Příklad 40

(i) $\left(\sum_{i=1}^n X_i, X_{(n)}\right)^\mathsf{T}$

Příklad 41

(ii) $\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\overline{X}_n+1-\frac{1}{n}\right)}$

(iii) Ano.

(iv) $\frac{\overline{X}_n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(\overline{X}_n+1-\frac{1}{n}\right)\left(\overline{X}_n+1-\frac{2}{n}\right)}$

Příklad 43

(i) $\overline{X}_n$.

(ii) $\frac{n}{n-1}\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)$.

Příklad 44

(i) $\overline{X}_n$.

(ii) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}$.

Příklad 45

(iii) Není, protože není funkcí úplné postačující statistiky.

(v) $\left(\overline{X}_n\right)^2 - \frac{S_n^2}{n}$.

Příklad 46

Viz Příklad 7.57 z knihy Anděl (2011).

Příklad 47

(i) $\widehat{\delta}_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i - \frac{1}{n\lambda}$

Příklad 48

(i) $\widehat{\lambda}_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$

Příklad 49

(i) Odhad $\widetilde{\theta}_n = 2\,\overline{X}_n$ je sice nestranný, ale není nejlepší nestranný.

(ii) $\frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(iii) Systém hustot není regulární.

Příklad 50

(i) $\boldsymbol{T} = \big(\sum_{i=1}^n X_{1i}, \ldots, \sum_{i=1}^n X_{(K-1)i}\big)^{\mathsf{T}}$

(ii) $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n X_{1i} \sum_{i=1}^n X_{2i}$

Příklad 51

(i) $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$.

(ii) Dle Zehnaova principu invariance je maximálně věrohodným odhadem $\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n) = \overline{X}_n\big(1-\overline{X}_n\big)$, $\sqrt{n}\big(\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n) - p(1-p)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(\big(0, (1-2p)^2 p(1-p)\big)$

(iii) $\mathsf{avar}(\widehat{p}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$, $\mathsf{avar}(\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)) = \frac{(1-2p)^2 p(1-p)}{n}$, což odpovídá příslušným Raovým-Cramérovým dolním mezím pro nejlepší nestranné odhady.
Za povšimnutí však stojí, že zatímco $\widehat{p}_n$ příslušné dolní meze dosahuje, protože je nestranný a jeho skutečný (nikoliv pouze asymptotický) rozptyl splňuje $\mathsf{var}(\widehat{p}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$, tak odhad $\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)$ není ani nestranný.

Příklad 52

(i) $\overline{X}_n$.

(ii) Maximálně věrohodný odhad je $\mathrm{e}^{-\overline{X}_n}$, přičemž platí

$$\sqrt{n}\big(\mathrm{e}^{-\overline{X}_n} - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\big(0, \lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda}\big),$$

(iii) Nejlepší nestranný odhady λ a $\mathrm{e}^{-\lambda}$ jsou $\overline{X}_n$ a $\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\sum_{i=1}^n X_i}$. Dolní Raova-Cramérova mez odpovídá asymptotickému rozptylu odhadů.

Příklad 53

(i) $\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$

(ii) $\sqrt{n}\big(\widehat{\lambda}_n - \lambda\big) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}\big(0, \lambda^2\big)$

Příklad 54

(i) $\widehat{p}_n = \frac{1}{1+\overline{X}_n}$, $\sqrt{n}(\widehat{p}_n - p_X) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(0, p^2(1-p)\big)$

(ii) $\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n) = \frac{\overline{X}_n}{(1+\overline{X}_n)^2}$, $\sqrt{n}(\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n) - p(1-p)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(0, (1-2p)^2 p^2(1-p)\big)$

Příklad 55

(i) Maximálně věrohodným odhadem je kterákoliv hodnot z intervalu

$$\Big(\max_{1\leq i\leq n} X_i - \tfrac{1}{2}, \min_{1\leq i\leq n} X_i + \tfrac{1}{2}\Big).$$

(ii) Odhad z (i) je konzistentní, neboť $\max_{1\leq i\leq n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta + \frac{1}{2}$ a $\min_{1\leq i\leq n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta - \frac{1}{2}$ pro $n \to \infty$.

Příklad 56

(i) $\widehat{M}_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

(ii) Je třeba dokazovat z definice.

Příklad 57

(i) $\widehat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Příklad 59

(i) Viz Příklad 7.99 z knihy Anděl (2011).

(ii) $J(\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \mathsf{E}\, X^\theta \log^2(X) = \frac{1}{\theta^2}(1 + \int_0^\infty y^2 \log^2(y)\, \mathrm{e}^{-y} dy)$.

Příklad 60

(i) Viz Příklad 7.96 z knihy Anděl (2011).

(ii) $\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, 3)$.

Příklad 61

(i)

$$\widehat{\theta}_n = -\frac{\overline{X}_n}{2} + \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{\overline{X}_n^2}{4}}.$$

Příklad 62

(i) Maximálně věrohodný odhad je dán imlicitně jako řešení rovnice $\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \mathrm{e}^{\widehat{\beta}_n X}) \overset{!}{=} 0$.

(ii) $J(\beta) = \mathsf{E}\ X^2 \mathrm{e}^{\beta X}$.

Příklad 63

(i) $\widehat{p}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \neq 0\}$

(ii) $\sqrt{n}\big(\widehat{p}_n - p_X\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\big(0, \frac{p}{2}(1 - 2\,p)\big)$

Příklad 64

(i) Viz Příklad 7.57 z knihy Anděl (2011).

Příklad 65

(i) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)^\mathsf{T} = \big(\overline{X}_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2\big)^\mathsf{T}$.

(ii)
$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\mu}_n\\ \widehat{\sigma}_n^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu\\ \sigma^2\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2, 0\\ 0,\ 2\sigma^4\end{pmatrix}\right)$$

(iii) Asymptotický interval spolehlivosti na základě obecné teorie maximálně věrohodných odhadů je $(\overline{X}_n \mp \frac{u_{1-\alpha/2}\,\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}})$. Přesný interval spolehlivosti pak je $(\overline{X}_n \mp \frac{t_{n-1}(1-\alpha/2)\,S_n}{\sqrt{n}})$, kde $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}\,\widehat{\sigma}_n^2$.

(iv)
$$\sqrt{n}\big(\widehat{\mu}_n + u_\alpha\,\widehat{\sigma}_n - (\mu + u_\alpha\,\sigma)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\Big(0, \sigma^2\big(1 + \tfrac{u_{1-\alpha}^2}{2}\big)\Big),$$

přičemž asymptotický rozptyl $\sigma^2(1 + u_{1-\alpha}^2/2)$ představuje dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad parametrické funkce $g(\mu, \sigma^2) = \mu + u_\alpha\,\sigma$.

Příklad 66

Položme $Y_i = \log X_i$.

(i) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)^\mathsf{T} = \big(\overline{Y}_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2\big)^\mathsf{T}$.

(ii)
$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\mu}_n\\ \widehat{\sigma}_n^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu\\ \sigma^2\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2, 0\\ 0,\ 2\sigma^4\end{pmatrix}\right)$$

(iii) Asymptotická konfidenční množina pro parametr $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$ je

$$\left\{(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \frac{n\,(\mu - \widehat{\mu}_n)^2}{\widehat{\sigma}_n^2} + \frac{n\,(\sigma^2 - \widehat{\sigma}_n^2)^2}{2\,\widehat{\sigma}_n^2} \leq \chi_2^2(1-\alpha)\right\}$$

(iv) $(\overline{X}_n - \frac{u_{1-\alpha}\,\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \infty)$

Příklad 67

(i) $(\widehat{\delta}_n, \widehat{\lambda}_n) = \Big(\min_{1\leq i\leq n} X_i, \frac{1}{\overline{X}_n - \min_{1\leq i\leq n} X_i}\Big)$

(ii) Odhad je (slabě) konzistentní.

Příklad 68

(i) $(\widehat{a}_n, \widehat{b}_n)^\mathsf{T} = \big(\min_{1\leq i\leq n} X_i, \max_{1\leq i\leq n} X_i\big)^\mathsf{T}$.

(ii) Odhad z (i) je konzistentní.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(n\,(\widehat{b}_n - b) \leq x\big) = \exp\{\frac{x}{b-a}\}$ pro $x < 0$. Pro $x \geq 0$ je tato pravděpodobnost 1. Tedy $n\,(\widehat{b}_n - b) \xrightarrow[n\to\infty]{d} -Y$, kde Y má exponenciální rozdělení s parametrem $\frac{1}{b-a}$.

Příklad 69

(i) $\widehat{\boldsymbol{p}}_n = \overline{X}_n$. (Pozor, věrohodnost nelze maximalizovat standardně. Model je přeparametrizovaný, neboť $p_K = 1 - \sum_{k=1}^{K-1} p_k$.)

(ii) Přímo z centrální limitní věty : $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{p}}_n - \boldsymbol{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_K(\mathbf{0}_K, \mathsf{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\mathsf{T})$

Příklad 70

Na data můžeme nahlížet jako na realizaci náhodného vektoru s multinomickým rozdělením $\boldsymbol{X} = \mathsf{Mult}_3(n; p, q, 1-p-q)$, kde X_1 je počet dvojčat, kdy se narodili dva chlapci, ... Maximálně věrohodným odhadem parametrické funkce $\frac{2p}{1+p-q}$ je $\frac{2\widehat{p}_n}{1+\widehat{p}_n-\widehat{q}_n}$, kde $\widehat{p}_n = \frac{X_1}{n}$ a $\widehat{q}_n = \frac{X_2}{n}$. Z centrální limitní věty máme

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{p}_n\\ \widehat{q}_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p(1-p), & -pq\\ -pq, & q(1-q)\end{pmatrix}\right)$$

Dále pak pomocí Δ-metody odvodíme asymptotické rozdělení náhodné veličiny

$$\sqrt{n}\left(\tfrac{2\widehat{p}_n}{1+\widehat{p}_n-\widehat{q}_n} - \tfrac{2p}{1+p-q}\right)$$

a této znalosti využijeme pro konstrukci intervalu spolehlivosti pro $\frac{2p}{1+p-q}$.

Příklad 71

(i)

$$(\widehat{p}_n, \widehat{\lambda}_n)^\mathsf{T} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n N_i}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n N_i\right)^\mathsf{T}$$

Příklad 73

(i) $\sqrt{n}\,(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_p\big(\mathbf{0}_p, \big[\mathsf{E}\,\frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\}}{(1+\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\})^2}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^\mathsf{T}\big]^{-1}\big)$;

(ii) $\big(\widehat{\beta}_{n1} \mp u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{J}^{11}}{n}}\big)$, kde $\widehat{J}^{11}$ je první diagonální prvek matice

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\exp\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\}}{(1+\exp\{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\})^2}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^\mathsf{T}\right]^{-1}.$$

Všimněte si, že jako odhad Fisherovy informační matice $J(\boldsymbol{\beta}) = \mathsf{E}\,\frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\}}{(1+\exp\{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_i\})^2}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^\mathsf{T}$ nemůžeme vzít $J(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)$, protože neznáme rozdělení $\boldsymbol{X}_i$ a tudíž potřebnou střední hodnotu neumíme spočítat.

Příklad 74

(i) $\big(\widehat{\theta}_n, \widehat{\eta}_n\big)^\mathsf{T} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}, \overline{X}_n\right)^\mathsf{T}$ a platí

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\widehat{\theta}_n\\ \widehat{\eta}_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\theta\\ \eta\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\theta^2 & 0\\ 0 & \eta^2\end{pmatrix}\right).$$

(ii) $\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \theta^2)$.

(iii) $\big(\widehat{\theta}_n - \frac{u_{1-\alpha/2}\widehat{\theta}_n}{\sqrt{n}}, \widehat{\theta}_n + \frac{u_{1-\alpha/2}\widehat{\theta}_n}{\sqrt{n}}\big)$.

(iv) Ano (je nestranný a je funkcí úplné postačující statistiky).

Příklad 75

(i) Test má kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \geq c$, kde jako c lze vzít $1-\alpha$ kvantil rozdělení $\mathsf{Po}(n\lambda_0)$. Test nezávisí na volbě λ_1 z čehož se dá vyvodit, že je to nejlepší test $H_0 : \lambda_X = \lambda_0$ proti $H_1 : \lambda_X > \lambda_0$.

(ii) V tomto případě má test kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \leq c$.

(iii) $\widehat{\lambda}_n = \overline{X}_n$ a test má kritický obor

$$\frac{\sqrt{n}|\widehat{\lambda}_n - \lambda_0|}{\sqrt{\lambda_0}} \geq u_{1-\alpha/2}$$

(iv) $2\big[-n(\overline{X}_n - \lambda_0) + \sum_{i=1}^n X_i \log(\frac{\overline{X}_n}{\lambda_0})\big] \geq \chi_1^2(1-\alpha)$

Příklad 76

(i) Test má kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \geq c$, kde jako c lze vzít $1-\alpha$ kvantil rozdělení $\mathsf{Bi}(n, p_0)$. Test nezávisí na volbě p_1 z čehož se dá vyvodit, že je to nejlepší test $H_0 : p_X = p_0$ proti $H_1 : p_X > p_0$.

(ii) V tomto případě má test kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \leq c$.

(iii) $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$ a test má kritický obor

$$\frac{\sqrt{n}\,|\widehat{p}_n - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \geq u_{1-\alpha/2}$$

(iv) $2\big[\sum_{i=1}^n X_i \log\big(\frac{\widehat{p}_n}{p_0}\big) + (n - \sum_{i=1}^n X_i)\log\big(\frac{1-\widehat{p}_n}{1-p_0}\big)\big] \geq \chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 78

(i) $n\log\big(\frac{\widetilde{\sigma}_n^2}{\widehat{\sigma}_n^2}\big) \geq \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ a $\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$.

(ii) $n\log\big(\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}_n^2}\big) + n\big(\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2} - 1\big) \geq \chi_1^2(1-\alpha)$.

(iii) $n\big[\log\big(\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}_n^2}\big) - 1\big] + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_2^2(1-\alpha)$.

Příklad 80

Lze řešit pomocí χ^2-testu dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry (viz NMSA331), kde odhadnutý parametr odpovídá odhadu za nulové hypotézy.

Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_n = 2\sum_{k=1}^{3} X_k \log\big(\frac{\widehat{p}_k}{p_k(\widetilde{\theta}_n)}\big) \geq \chi_1^2(1-\alpha),$$

kde pro $k \in \{1, \ldots, 3\}$ je $\widehat{p}_k = \frac{X_k}{n}$ maximálně věrohodný odhad (bez předpokladu platnosti H_0) Dále

$$(p_1(\widetilde{\theta}_n), p_2(\widetilde{\theta}_n), p_3(\widetilde{\theta}_n))^\mathsf{T} = \big(\widetilde{\theta}_n^2, 2\widetilde{\theta}_n(1-\widetilde{\theta}_n), (1-\widetilde{\theta}_n)^2\big)^\mathsf{T},$$

kde $\widetilde{\theta}_n = \frac{2X_1+X_2}{2n}$, je odhad za předpokladu platnosti H_0.

Příklad 81

(i) Test má kritický obor

$$LR_n = 2\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big[Y_i(\widehat{\alpha}_n + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T} X_i) - \mathrm{e}^{\widehat{\alpha}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T} X_i}\big] - \sum_{i=1}^{n}\big[Y_i\widetilde{\alpha}_n - \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_n}\big]\Big\} \geq \chi_q^2(1-\alpha),$$

kde $\binom{\widehat{\alpha}_n}{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n}$ je maximálně věrohodné odhad bez omezení a dostaneme jej jako numerické řešení soustavy $(q+1)$ rovnic o $(q+1)$ neznámých

$$\sum_{i=1}^{n}\big[Y_i - \mathrm{e}^{\widehat{\alpha}_n+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T} X_i}\big] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\big[Y_i - \mathrm{e}^{\widehat{\alpha}_n+\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n^\mathsf{T} X_i}\big]\boldsymbol{X}_i = \mathbf{0}_q.$$

Dále $\widetilde{\alpha}_n = \log \overline{Y}_n$ je odhad za nulové hypotézy, který maximalizuje log-věrohodnost H_0, tj. $\widetilde{\ell}_n(\alpha) = \alpha\sum_{i=1}^n Y_i - n\exp\{\alpha\} + c$, kde c je člen, který nezávisí na α.

(ii) Hodnota testové statistiky a příslušná asymptotická p-hodnota:

	test. stat.	p-hodnota
LR_n^*	11.2101	0.0037

Příklad 82

Lze řešit pomocí χ^2-testu dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry (viz NMSA331), kde odhadnutý parametr odpovídá odhadu za nulové hypotézy.

Vzhledem k malým počtům si nejdříve sloučíme poslední tři sloupečky. Nechť X_k pro $k \in \{0, \ldots, 3\}$ značí počet případů, že ve sboru v daném roce bylo právě k úmrtí (v případě $k = 3$ je to 3 nebo více) v důsledků kopnutí koně.

Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_n = 2\sum_{k=0}^{3} X_k \log\Big(\frac{\widehat{p}_k}{p_k(\widetilde{\lambda}_n)}\Big) \geq \chi_2^2(1-\alpha),$$

kde pro $k \in \{0, \ldots, 3\}$ je $\widehat{p}_k = \frac{X_k}{n}$ maximálně věrohodný odhad (bez předpokladu platnosti H_0). Odhad za nulové hypotézy pak má tvar

$$\Big(p_0(\widetilde{\lambda}_n), \ldots, p_3(\widetilde{\lambda}_n)\Big)^\mathsf{T} = \Big(\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_n}, \frac{\widetilde{\lambda}_n\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_n}}{1!}, \frac{\widetilde{\lambda}_n^2\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_n}}{2!}, \sum_{j=3}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}_n^j\mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_n}}{j!}\Big),$$

kde $\widetilde{\lambda}_n$ řeší rovnici

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{X_k}{p_k(\widetilde{\lambda}_n)}\frac{\partial p_k(\widetilde{\lambda}_n)}{\partial\lambda} = 0.$$

Příklad 83

Označme n_{jk} příslušnou četnost na (j,k) místě kontingenční tabulky a $N = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 n_{jk}$.

(i) Testová statistika testu poměrem věrohodnosti má tvar

$$LR_N = 2\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 n_{jk} \log\left(\tfrac{\widehat{p}_{jk}}{\widetilde{p}_{jk}}\right),$$

kde $\widehat{p}_{jk} = \frac{n_{jk}}{N}$ a $\widetilde{p}_{jk} = \frac{n_{j+}n_{+k}}{N^2}$. Kritický obor pak je

$$LR_N \geq \chi_9^2(1-\alpha).$$

Lze také řešit klasickým χ^2 testem nezávislosti.

(ii) Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_N \geq \chi_6^2(1-\alpha).$$

kde LR_N je jako výše, nicméně odhad za nulové hypotézy má tvar $\widetilde{p}_{jk} = \frac{n_{jk}+n_{kj}}{2N}$.

Příklad 84

(i) Max. věr. odhad je $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$.

$$W_n = \frac{n(\widehat{p}_n - p_0)^2}{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)} = \left(\frac{\sqrt{n}(\widehat{p}_n - p_0)}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}\right)^2,$$

$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}(\widehat{p}_n - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)^2,$$

$$LR_n = 2\left[\sum_{i=1}^n X_i \log\tfrac{\widehat{p}_n}{p_0} + \left(n - \sum_{i=1}^n X_i\right)\log\tfrac{1-\widehat{p}_n}{1-p_0}\right].$$

Příklad 85

(i) Max. věr. odhad je $\widehat{\lambda}_n = \overline{X}_n$.

$$W_n = \frac{n\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)^2}{\widehat{\lambda}_n} = \left(\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_n}}\right)^2,$$

$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0}}\right)^2,$$

$$LR_n = 2\left[\sum_{i=1}^n X_i \log\tfrac{\widehat{\lambda}_n}{\lambda_0} - n(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)\right].$$

Příklad 86

Model: $X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro které platí:

$$\mathsf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\,\frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 1,2,3,\dots$$

(i) $\widehat{\lambda}_n$ řeší rovnici $\overline{X}_n = \frac{\widehat{\lambda}_n}{1-\mathrm{e}^{-\widehat{\lambda}_n}}$ (tu je v praxi třeba řešit numericky). Tento odhad má asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0,\sigma^2)$, kde $\sigma^2(\lambda) = \frac{\lambda(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^2}{(1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})}$.

Příklad 87

(i) Max. věr. odhad je $\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$.

$$W_n = \frac{n\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)^2}{\widehat{\lambda}_n^2} = \left(\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\widehat{\lambda}_n}\right)^2,$$

$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\lambda_0}\right)^2,$$

$$LR_n = 2\left[n \log \tfrac{\widehat{\lambda}_n}{\lambda_0} - \sum_{i=1}^{n} X_i\,(\widehat{\lambda}_n - \lambda_0)\right].$$

Nulovou hypotézu zamítáme, pokud daná testová statistika je větší (nebo rovna) než $\chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 88

(i) Max. věr. odhad je $\widehat{p}_n = \frac{1}{1+\overline{X}_n}$.

$$W_n = \frac{n(\widehat{p}_n - p_0)^2}{\widehat{p}_n^2(1-\widehat{p}_n)}$$

$$R_n = \left(\tfrac{n}{p_0} - \tfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{1-p_0}\right)^2 n\, p_0^2(1-p_0),$$

$$LR_n = 2\left[n \,\log \tfrac{\widehat{p}_n}{p_0} + \sum_{i=1}^{n} X_i \log \tfrac{1-\widehat{p}_n}{1-p_0}\right].$$

Příklad 89

(i) $\widehat{\beta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i X_i}$

(ii)

$$W_n = \frac{n\,(\widehat{\beta}_n - \beta_0)^2}{\widehat{\beta}_n^2}$$

$$R_n = \left(\tfrac{n}{\beta_0} - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2 \beta_0^2$$

$$LR_n = 2\left[n \log \tfrac{\widehat{\beta}_n}{\beta_0} - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\,(\widehat{\beta}_n - \beta_0)\right].$$

Příklad 91

(i) Jednoznačnost a existence maximálně věrohodného odhadu, viz Příklad 7.96 z knihy Anděl (2011). $J(\theta) = \frac{1}{3}$.

$$W_n = \frac{n\,(\widehat{\theta}_n - \theta_0)^2}{3}$$

$$R_n = \frac{\left(n - \sum_{i=1}^n \frac{2e^{\theta_0 - X_i}}{1+e^{\theta_0 - X_i}}\right)^2}{\frac{n}{3}}$$

$$LR_n = 2\,n\,(\widehat{\theta}_n - \theta_0) - 4\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1+e^{\theta_0 - X_i}}{1+e^{\widehat{\theta}_n - X_i}}\right)$$

Za povšimnutí stojí, že pro Raův skórový test nepotřebujeme spočítat $\widehat{\theta}_n$ (který je dán implicitně jako řešení nelineární rovnice), tudíž jej zvládneme provést i bez numerického softwaru.

Příklad 92

(i) Maximálně věrohodné odhady jsou $\widehat{\mu}_n = \overline{X}_n$ a $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.

$$W_n = \frac{n\,(\widehat{\mu}_n - 0)^2}{\widehat{\sigma}_n^2} + \frac{n\,(\widehat{\sigma}_n^2 - 1)^2}{2\widehat{\sigma}_n^4} \geq \chi_2^2(1-\alpha),$$
$$R_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \left[X_i^2 - 1\right]\right)^2}{2n} \geq \chi_2^2(1-\alpha),$$
$$LR_n = -n\log\sigma_n^2 + \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 1\right) \geq \chi_2^2(1-\alpha).$$

Příklad 96

$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ je maximálně věrohodný odhad σ^2 (bez omezení) a $\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ je maximálně věrohodný odhad za H_0.

(i) $LR_n^* = n\log\frac{\widetilde{\sigma}_n^2}{\widehat{\sigma}_n^2}$, $W_n^* = \frac{n(\overline{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma}_n^2}$, $R_n^* = \frac{n(\overline{X}_n - \mu_0)}{\widetilde{\sigma}_n^2}$.
Ve všech případech zamítáme, pokud je testová statistika $\geq \chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 97

(i) Jako v 96, pouze místo X_i je všude $\log X_i$.

Příklad 99

Označme $Y_k = \sum_{i=1}^n X_{ik}$ pro $k \in \{1, \dots, 4\}$. Potom maximálně věrohodný odhad (bez omezení) je

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_n = \left(\widehat{p}_{n1}, \dots, \widehat{p}_{n4}\right)^\top = \left(\tfrac{Y_1}{n}, \dots, \tfrac{Y_4}{n}\right)^\top.$$

Asymptotické rozdělení získáme přímo pomocí centrální limitní věty (rozmyslete si, proč by nebylo vhodné používat obecný výsledek pro maximálně věrohodný odhad).

Test poměrem věrohodnosti má ve všech případech tvar

$$LR_n^* = 2\sum_{k=1}^4 X_k \log\left(\tfrac{\widehat{p}_{nk}}{\widetilde{p}_{nk}}\right) \geq \chi_1^2(1-\alpha).$$

(i) Odhad parametru $\boldsymbol{p}$ za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$\left(\widetilde{p}_{n1}, \dots, \widetilde{p}_{n4}\right)^\top = \left(\frac{1}{4}, \frac{3\,Y_2}{4\sum_{k=2}^4 Y_k}, \frac{3\,Y_3}{4\sum_{k=2}^4 Y_k}, \frac{3\,Y_4}{4\sum_{k=2}^4 Y_k}\right)^\top.$$

Waldův test má kritický obor

$$\left|\frac{\sqrt{n}\,\left(\widehat{p}_{1n} - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\widehat{p}_{1n}(1-\widehat{p}_{1n})}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$$

(ii) Odhad parametru $\boldsymbol{p}$ za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$\big(\widetilde{p}_{n1}, \dots, \widetilde{p}_{n4}\big)^{\mathsf{T}} = \Big(\tfrac{Y_1+Y_2}{2n}, \tfrac{Y_1+Y_2}{2n}, \widehat{p}_{n3}, \widehat{p}_{n4}\Big)^{\mathsf{T}}.$$

Jiný asymptotický test by šel také sestavit pomocí metody představené v části „Odhady parametrů multinomického rozdělení“ v kurzu NMSA331.

(iii) Odhad parametru $\boldsymbol{p}$ za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$\big(\widetilde{p}_{n1}, \dots, \widetilde{p}_{n4}\big)^{\mathsf{T}} = \Big(\tfrac{Y_1+Y_3}{2.1\,n}, \widehat{p}_{n2}, \tfrac{1.1(Y_1+Y_3)}{2.1\,n}, \widehat{p}_{n4}\Big)^{\mathsf{T}}.$$

Jiný asymptotický test by šel také sestavit pomocí metody představené v části „Odhady parametrů multinomického rozdělení“ v kurzu NMSA331.

Příklad 101

Maximálně věrohodné odhady (bez omezení) jsou $\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)(X_i - \overline{X}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$, $\widehat{\beta}_0 = \overline{Y}_n - \widehat{\beta}_1\, \overline{X}_n$ a $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1\, X_i)^2$.

Maximálně věrohodné odhady za nulové hypotézy pak jsou $\widetilde{\beta}_0 = \overline{Y}_n$ a $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \widetilde{\beta}_0)^2$.

(i) $LR_n^* = n \log \frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2} \geq \chi_2^2(1-\alpha)$,

Příklad 103

(i) Jedná se o speciální případ příkladu 83.

Příklad 104

Maximálně věrohodný odhad (bez omezení) $\binom{\widehat{\alpha}_n}{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n}$ dostaneme jako numerické řešení soustavy $(q+1)$ rovnic o $(q+1)$ stejně jako v příkladu 81. Stejně tak odhad za nulové hypotézy $\widetilde{\alpha}_n$. Dále k odhadu Fisherovu informační matice využijeme empirickou Fisherovu informační matici (neboť neznáme rozdělení $\boldsymbol{X}_i$)

$$\widehat{\boldsymbol{J}}(\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\alpha + \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X}_i}, & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}} \mathrm{e}^{\alpha + \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X}_i} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i\, \mathrm{e}^{\alpha + \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X}_i}, & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}} \mathrm{e}^{\alpha + \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X}_i} \end{pmatrix}$$

(i) $W_n^* = n\,\big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \mathbf{0}_q\big)^{\mathsf{T}} \big[\widehat{\boldsymbol{J}}^{22}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)\big]^{-1} \big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \mathbf{0}_q\big) \geq \chi_q^2(1-\alpha)$, kde $\widehat{\boldsymbol{J}}^{22}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)$ je $(2,2)$ blok inverze matice $\widehat{\boldsymbol{J}}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)$.
$R_n^* = \frac{1}{n}\,\big(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i (Y_i - \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_n})\big)^{\mathsf{T}} \big[\widehat{\boldsymbol{J}}^{22}(\widetilde{\alpha}_n, \mathbf{0}_q)\big] \big(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i (Y_i - \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_n})\big) \geq \chi_q^2(1-\alpha)$, kde $\widehat{\boldsymbol{J}}^{22}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)$ je $(2,2)$ blok inverze matice $\widehat{\boldsymbol{J}}(\widetilde{\alpha}_n, \mathbf{0}_q)$.

(ii) Hodnoty testových statistik a příslušná asymptotická p-hodnota:

	test. stat.	p-hodnota
W_n^*	8.9064	0.0028
R_n^*	10.9358	0.0009

Asymptotický intervalový odhad pro parametr β_1 je

$$\Big(\widehat{\beta}_{n1} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{\sigma}^2(\beta_1)}{n}},\ \widehat{\beta}_{n1} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{\sigma}^2(\beta_1)}{n}}\Big),$$

kde $\widehat{\sigma}^2(\beta_1)$ je $(2,2)$-prvek inverze matice $\boldsymbol{J}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)$. Numericky to v daném příkladě pro $\alpha = 0.05$ vychází $(-0.752, 1.771)$.

Příklad 105

Maximálně věrohodný odhad $\binom{\widehat{\alpha}_n}{\widehat{\beta}_n}$ bez omezení dostaneme jako numerické řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

$$\sum_{i=1}^{n} \big[Y_i - \tfrac{\exp\{\alpha+\beta X_i\}}{1+\exp\{\alpha+\beta X_i\}}\big] = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \big[Y_i - \tfrac{\exp\{\alpha+\beta X_i\}}{1+\exp\{\alpha+\beta X_i\}}\big] = 0.$$

Pro daná data vychází $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)^{\mathsf{T}} = (-3.599, 0.056)$

Dále $\widetilde{\alpha}_n = \log\big(\frac{\overline{Y}_n}{1-\overline{Y}_n}\big)$ je maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy (že $\beta = 0$).

Dále jelikož neznáme rozdělení $\boldsymbol{X}_i$, tak k odhadu Fisherovu informační matice využijeme empirickou Fisherovu informační matici

$$\widehat{\boldsymbol{J}}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp\{\alpha+\beta X_i\}}{(1+\exp\{\alpha+\beta X_i\})^2}, & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i \exp\{\alpha+\beta X_i\}}{(1+\exp\{\alpha+\beta X_i\})^2} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i \exp\{\alpha+\beta X_i\}}{(1+\exp\{\alpha+\beta X_i\})^2}, & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 \exp\{\alpha+\beta X_i\}}{(1+\exp\{\alpha+\beta X_i\})^2} \end{pmatrix}$$

(i) $W_n^* = \Big(\frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_n - 0)}{\sqrt{\widehat{J}^{22}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)}}\Big)^2$, kde $\widehat{J}^{22}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)$ je $(2,2)$ prvek inverze matice $\widehat{\boldsymbol{J}}(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)$.
$R_n^* = \frac{1}{n}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \frac{e^{\widetilde{\alpha}_n}}{1+e^{\widetilde{\alpha}_n}})\big)^2 \widehat{J}^{22}(\widetilde{\alpha}_n, 0)$, kde $\widehat{J}^{22}(\widetilde{\alpha}_n, 0)$ je $(2,2)$-prvek inverze matice $\widehat{\boldsymbol{J}}(\widetilde{\alpha}_n, 0)$.

	test. stat.	p-hodnota
LR_n^*	1.14	0.29
R_n^*	1.08	0.30
W_n^*	0.98	0.32

(ii) Asymptotický interval spolehlivosti pro β je

$$\Big(\widehat{\beta}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{J}^{22}(\widehat{\alpha}_n,\widehat{\beta}_n)}{n}}, \widehat{\beta}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{J}^{22}(\widehat{\alpha}_n,\widehat{\beta}_n)}{n}}\Big).$$

Numericky to pro daná data pro $\alpha = 0.05$ pak vychází $(-0.055, 0.168)$.