MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Březinová, Kluvancová

Dvoustupňové metody

16. května 2024

Úvod

- Sekvenční analýza - náhodný rozsah výběru
- Waldův přístup vs. Vícestupňové algoritmy
- Příklady využití
  - kontrola jakosti
  - odvíjí-li se cena od počtu experimentů

- Předpoklady: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 jsou neznámé
- Cíl:
  - konstrukce intervalu spolehlivosti pro μ s danou šířkou $2d$
  - testování jednoduché hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ s předepsanou hladinou a silou

Interval spolehlivosti se známým rozptylem

- Předpokládejme, že σ^2 známe
- Interval spolehlivosti s šířkou $2d$ má tvar

$$J_n = \left(\overline{X}_n - d, \overline{X}_n + d\right)$$

- Koeficient spolehlivosti lze psát jako

$$P_{\mu,\sigma}\left(\mu \in J_n\right) = 2\Phi(\sqrt{n}d/\sigma^2) - 1 \geq 1 - \alpha$$

- Pro dané σ^2 dostáváme ideální rozsah výběru

$$n \geq \frac{\mu^2_{1-\alpha/2}\sigma^2}{d^2}$$

Neexistence intervalového odhadu pevné šířky

Věta

Nechť $Y_1, ..., Y_n$ je náhodný výběr z rodiny rozdělení s parametrem polohy (μ) a měřítka (σ) se sdruženou hustotou

$$\sigma^{-n} f\left(\frac{y_1-\mu}{\sigma}, ..., \frac{y_n-\mu}{\sigma}\right), \qquad -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty,$$

kde μ, σ jsou neznámé, $f(\mathbf{x})$ je spojitá pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
Poté neexistuje intervalový odhad $(L(\mathbf{Y}), U(\mathbf{Y})) \subset \mathbf{R}$ pro μ na základě $Y_1, ..., Y_n$ takový, že pro pevné $0 < \alpha < 1$ a pevné $0 < d < \infty$ platí

$$P(\mu \in (L(\mathbf{Y}), U(\mathbf{Y}))|\mu, \sigma) \geq 1 - \alpha \qquad (1)$$

$$U(\mathbf{y}) - L(\mathbf{y}) < 2d \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n. \qquad (2)$$

- důkaz na tabuli

Neexistence netriviálního testu s chybou 2. druhu nezávislou na rozptylu

- Hledáme **netriviální** test $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu = \mu_1$
- Předpokládáme pevný rozsah výběru
- Požadujeme hladinu α

- Ukážeme, že takový test, který má chybu druhého druhu **nezávislou** na σ, neexistuje

Steinova dvoustupňová metoda - idea

- Předpoklady: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 jsou neznámé
- Cíl: konstrukce intervalu spolehlivosti pro μ s **danou šířkou** $2d$
- Idea:
  - Prvotní výběr $X_1, \ldots, X_{n_0}$
  - Odhad neznámého rozptylu na základě prvotního výběru
  - Stanovení konečného rozsahu výběru N tak, aby měl interval požadovaný koeficient spolehlivosti a danou šířku

Stupeň 1:

- Prvotní výběr $X_1, \ldots, X_{n_0}$
- Výpočet $\overline{X}_{n_0}$ a $S^2_{n_0}$
- $N = \max\left\{n_0 + 1, \left[z^{-1} S^2_{n_0}\right] + 1\right\}$
- Volba $a_0, a_{n_0+1}, \ldots, a_N$ splňujících:

$$a_0 + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k = 1, \quad \frac{1}{n_0} a_0^2 + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k^2 = z \cdot S_{n_0}^{-2}$$

Steinova dvoustupňová metoda - první přístup

Stupeň 2:

- Další výběr $X_{n_0+1}, \dots, X_N$
- Statistika $\ell_N = a_0 \overline{X}_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k X_k$ splňující

$$z^{-\frac{1}{2}}(\ell_N - \mu) \sim t_{n_0-1}$$

- Je-li z zvoleno tak, aby $z^{-\frac{1}{2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_0-1} = d$, pak

$$P(\ell_N - d < \mu < \ell_N + d) = 1 - \alpha$$

- $(\ell_N - d, \ell_N + d)$ je $(1-\alpha)$-konfidenční interval šířky $2d$

Steinova dvoustupňová metoda - druhý přístup

- První přístup: spolehlivost přesně $1-\alpha$ a šířka přesně $2d$
- Druhý přístup: spolehlivost alespoň $1-\alpha$ a šířka nejvýše $2d$

Stupeň 1:

- Prvotní výběr $X_1, \ldots, X_{n_0}$
- Výpočet $\overline{X}_{n_0}$ a $S^2_{n_0}$
- $N^* = \max\left\{n_0, \left[z^{-1} S^2_{n_0}\right] + 1\right\}$

Stupeň 2:

- Další výběr $X_{n_0+1}, \dots, X_{N^*}$ (pro $N^* = n_0$ končíme s výběrem po prvním stupni)
- $\overline{X}_{N^*}$ je nestranný odhad μ a $var_{\mu,\sigma}(\overline{X}_{N^*}) = \sigma^2 E_{\mu,\sigma}(N^{*\,-1})$
- Statistika splňující

$$\frac{(\overline{X}_{N^*} - \mu)}{S_{n_0}} N^{*\,\frac{1}{2}} \sim t_{n_0-1}$$

- Je-li z zvoleno tak, aby $z^{-\frac{1}{2}} t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n_0-1} = d$, pak

$$\left(\overline{X}_{N^*} - N^{*\,\frac{1}{2}} S_{n_0} t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n_0-1},\ \overline{X}_{N^*} + N^{*\,\frac{1}{2}} S_{n_0} t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n_0-1}\right)$$

  je $(1-\alpha)$-konfidenční interval šířky nejvýše $2d$

Steinova dvoustupňová metoda - ilustrace

- Naměřené hodnoty určité fyzikální konstanty μ ($n_0 = 9$):

$$1.04 \quad 1.03 \quad 1.06 \quad 1.04 \quad 1.01 \quad 1.03 \quad 1.03 \quad 1.04 \quad 1.05$$

- Považujme je za nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ neznáme
- Koeficient spolehlivosti $1 - \alpha = 0.95$, šířka 0.02 (resp. 0.01)
- Počet měření potřebných k dosažení intervalu spolehlivosti pro μ daného koeficientu spolehlivosti a dané šířky je

$$N^* = 11\,(d_1 = 0.01), \quad N^* = 43\,(d_2 = 0.005).$$

- Hledaný intervalu je pak tvaru

$$J_n = (\overline{X}_{N^*} - d, \overline{X}_{N^*} + d)$$

- $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$, respektive $H_2 : \mu \neq \mu_0$

- H_0 proti H_1 : zamítáme H_0, pokud $t > t_{1-\alpha, n_0-1}$
- pro $\mu - \mu_0 > \delta$

$\rightarrow \beta(\mu) > P_{\mu,\sigma}\left(N^{*\,1/2} S_{n_0}^{-1} (\overline{X}_{N^*} - \mu) > t_{1-\alpha, n_0-1} - z^{-1/2}\delta\right)$

- H_0 proti H_2 : zamítáme H_0, pokud $|t| > t_{1-\alpha/2, n_0-1}$
- pro $|\mu - \mu_0| > \delta$

$\rightarrow \beta(\mu) > P_{\mu,\sigma}\left(N^{*\,1/2} S_{n_0}^{-1} (\overline{X}_{N^*} - \mu) > t_{1-\alpha, n_0-1} - z^{-1/2}\delta\right) +$
$P\left(N^{*\,1/2} S_{n_0}^{-1} (\overline{X}_{N^*} - \mu) < -t_{1-\alpha/2, n_0-1} - z^{-1/2}\delta\right)$