# Různé sekvenční testy a simulace

Král, Krynická

21. března 2024

## Obsah

- různé sekvenční testy v alternativním rozdělení + simulace,
- Waldův test v normálním rozdělení + simulace,

# Základní pojmy pro obecný sekvenční test

- $\alpha = \mathrm{P}(\text{zam. } H_0 | H_0 \text{ platí})$,
- $\beta = \mathrm{P}(\text{zam. } H_1 | H_1 \text{ platí})$,
- posloupnosti borel. množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$,
- statistický test S,
- test S skončí s pravděpodobností 1,
- operační charakteristika

$$L_S(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_k) \in B_k^0; \theta\right),$$

- rozsah a střední rozsah náhodného výběru

$$N = \min\{n; (X_1, \ldots, X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\}, \ \mathrm{E}_S(N; \theta).$$

# Problém kontroly jakosti

- Mějme $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathrm{P}(X_i = 1) = p$, $\mathrm{P}(X_i = 0) = 1 - p$, kde $p \in (0{,}1)$.
- Testujeme

$$H_0: \ p = p_0 \quad \text{proti} \quad H_1: \ p = p_1, \quad 0 < p_0 < p_1 < 1,$$

- případně

$$H_0: \ p \leq p_0 \quad \text{proti} \quad H_1: \ p \geq p_1.$$

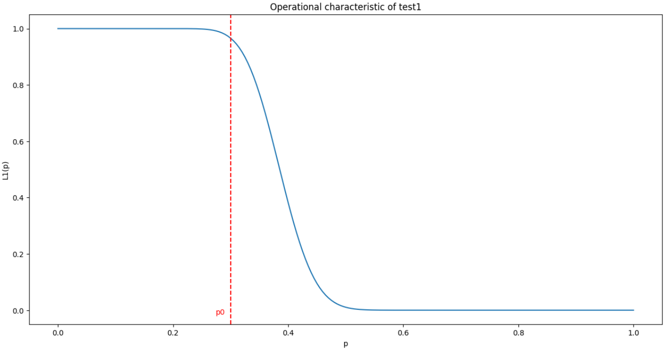
# Test s pevným rozsahem výběru

- zvolme rozsah $n_0$ a horní mez $\alpha$ pro pst chyby 1. druhu,
- $H_0$ přijmeme, jestliže $\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq k$,
- $H_0$ zamítneme, jestliže $\sum_{i=1}^{n_0} X_i > k$,
- číslo $k$ volíme tak, aby $\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n_0} X_i > k; H_0\right) \leq \alpha$,
- test skončí s pravděpodobností 1,
- pro $L_1(p)$ platí

$$L_1(p) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq k; p\right) = H_{n_0}(k;p), \text{ kde}$$

$$H_{n_0}(k;p) = \sum_{j=1}^{k} p^j (1-p)^{n_0-j} \binom{n_0}{j}.$$

# Test s pevným rozsahem výběru




Obrázek: Operační charakteristika testu s pevným rozsahem výběru.

# Dvoustupňový test

Zvolme dva pevné rozsahy výběrů $n_1$ a $n_2$ a dále $\alpha$.

- Provedeme výběr $X_1, \ldots, X_{n_1}$,
- $a < b$ celá čísla,
- jestliže $\sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq a$, přijímáme $H_0$,
- jestliže $\sum_{i=1}^{n_1} X_i > b$, přijímáme $H_1$ (zamítáme $H_0$),
- jestliže $a < \sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq b$, pokračujeme s výběrem $X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_1+n_2}$,

- jestliže $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i \leq c$, přijímáme $H_0$,
- jestliže $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i > c$, přijímáme $H_1$ (zamítáme $H_0$).

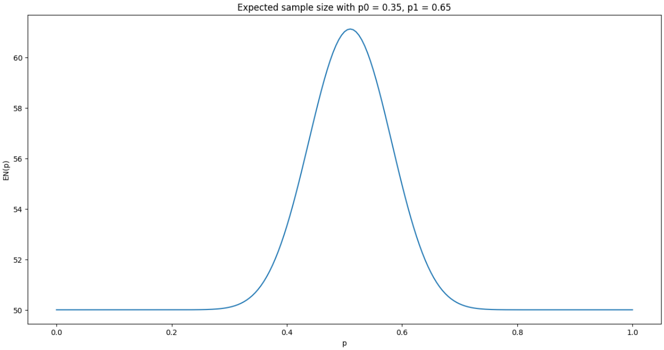
# Dvoustupňový test

- test skončí s pravděpodobností 1,
- platí

$$\mathrm{E}_2(N;p) = n_1 + n_2(H_{n_1}(b;p) - H_{n_1}(a;p)),$$

$$L_2(p) = H_{n_1}(a;p) + \sum_{j=a+1}^{b} \binom{n_1}{j} p^j (1-p)^{n_1-j} H_{n_2}(b-j;p).$$

# Dvoustupňový test




Obrázek: Střední rozsah výběru pro dvoustupňový test s $p_0 = 0.35$, $p_1 = 0.65$.

# Useknutý sekvenční test

Zvolme přirozená čísla $c, n_0$.

- Na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n, n < n_0$,
  - přijmeme $H_1$, jestliže $\sum_{i=1}^n X_i = c$,
  - jinak pokračujeme ve výběru.
- Při $n = n_0$
  - přijmeme $H_1$, jestliže $\sum_{i=1}^n X_i = c$,
  - jinak přijmeme $H_0$.

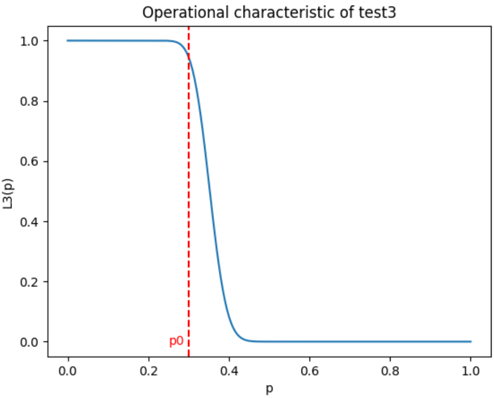
## Useknutý sekvenční test

- test skončí s pravděpodobností 1,
- Platí

$$L_3(p) = \sum_{d=0}^{c-1} \binom{n_0}{d} p^d (1-p)^{n_0-d},$$

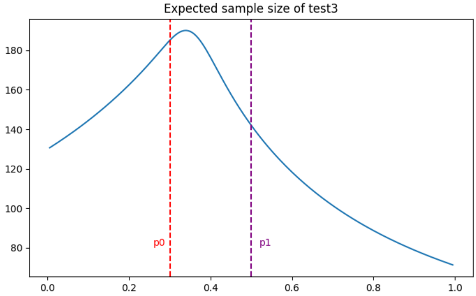
$$\mathrm{E}_3(N;p) = \frac{c}{p} \sum_{d=c+1}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{d} p^d (1-p)^{n_0+1-d} + \frac{n_0-c+1}{1-p} \sum_{d=0}^{c-1} \binom{n_0+1}{d} p^d (1-p)^{n_0+1-d}.$$

# Useknutý sekvenční test




Obrázek: Operační charakteristika useknutého sekvenčního testu.

# Useknutý sekvenční test




Obrázek: Střední rozsah výběru useknutého sekvenčního testu.

# Opakování

Pro $\theta_0$, $\theta_1 \in \Theta$ definujeme

$$
\begin{aligned}
Z_i(\theta_0, \theta_1) &= log \frac{f(X_i;\theta_1)}{f(X_i;\theta_0),}, && \text{je-li } f(X_i;\theta_0) \neq 0, f(X_i;\theta_1) \neq 0, \\
&= 1, && \text{je-li } f(X_i;\theta_0) = 0, f(X_i;\theta_1) = 0, \\
&= -\infty && \text{je-li } f(X_i;\theta_0) \neq 0, f(X_i;\theta_1) = 0, \\
&= \infty, && \text{je-li } f(X_i;\theta_0) = 0, f(X_i;\theta_1) \neq 0.
\end{aligned}
$$

A dále

$$Q_n(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\theta_0, \theta_1).$$

## Opakování

- definice Waldova testu,
- kritické nerovnosti

$$b < Q_n(\theta_0, \theta_1) < a, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

  kde $-\infty < b < a < +\infty$,
- platí

$$a \leq \ln \frac{1-\beta}{\alpha}, b \geq \ln \frac{\beta}{1-\alpha},$$

- aproximujeme

$$a* = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}, b* = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

# Waldův sekvenční test

- zvolme $\alpha$, $\beta$,
- položme

$$Q_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{P}\left(X_i = 1; p_1\right)}{\mathrm{P}\left(X_i = 1; p_0\right)},$$

- označme $a = \ln A$, $b = \ln B$, obvykle

$$b = \ln \frac{\beta}{1-\alpha},\ a = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

# Waldův sekvenční test

- přijmeme $H_0$, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq h_b + ns$,
- přijmeme $H_1$, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq h_a + ns$,
- pokračujeme, jestliže $h_b + ns < \sum_{i=1}^{n} X_i < h_a + ns$, kde

$$h_b = \frac{b}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}, \quad h_a = \frac{a}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}$$

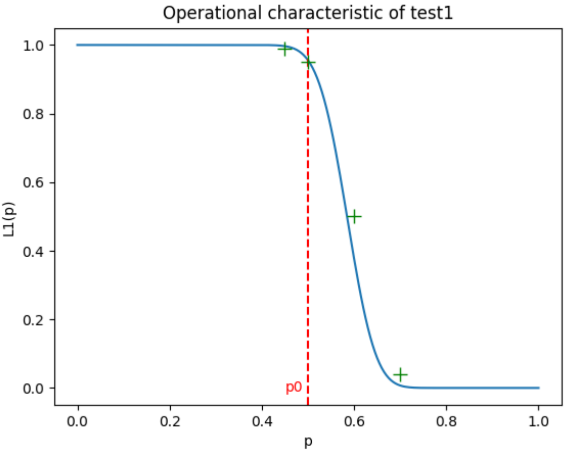
$$s = \frac{\ln \frac{(1-p_0)}{(1-p_1)}}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}.$$

# Příklad z minulého týdne

$p_0 = 0.500, p_1 = 0.708$

| p | $L(p)$ | $\widehat{L}(p)$ | $E(N,p)$ | $\widehat{\widehat{E}}(N,p)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.45 | 0.9868 | 0.9853 | 23.16 | 22.00 |
| 0.50 | 0.9456 | 0.9424 | 31.83 | 30.08 |
| 0.60 | 0.4953 | 0.5000 | 51.63 | 48.17 |
| 0.70 | 0.0432 | 0.0492 | 31.85 | 30.65 |

# Příklad z minulého týdne



## Useknutý Waldův test

- Zvolme $\alpha$, $\beta$ a přirozené číslo $n_0$.
- Postupně tvoříme náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots,$
- pro $(X_1, \ldots, X_n)$, $n < n_0$, použijeme Waldův test,
- pro $(X_1, \ldots, X_n)$, $n = n_0$
  - přijmeme $H_0$, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq ns$,
  - jinak přijmeme $H_1$.
- Požadujeme navíc $b < 0 < a$.

# Waldův test po skupinách

- Zvolme $\alpha$, $\beta$ a přirozené číslo $k$.
- rozhodování děláme vždy po $k$ krocích, tj. po $nk$-tém pozorování
  - přijmeme $H_0$, jestliže $\sum_{i=1}^{nk} X_i \leq h_b + nks$,
  - přijmeme $H_1$, jestliže $\sum_{i=1}^{nk} X_i \geq h_a + nks$,
  - pokračujeme, jestliže $h_b + nks < \sum_{i=1}^{nk} X_i < h_a + nks$.

## Waldova aproximace

- operační charakteristika

$$L_S(\theta) \approx \widehat{L}_S(\theta) = \frac{1 - \exp\{h(\theta)a\}}{\exp\{h(\theta)b\} - \exp\{h(\theta)a\}}, \quad \mathrm{E}(Z_1;\,\theta) \neq 0,$$

kde $h(\theta)$ určíme jako nenulové řešení rovnice

$$\mathrm{E}\left(\exp\{h(\theta)Z_1\};\,\theta\right) = 1,$$

- střední rozsah výběru

$$\mathrm{E}_S(N;\theta) \approx \widehat{\mathrm{E}}_S(N;\theta) = \frac{L_S(\theta)b + (1 - L_S(\theta))a}{\mathrm{E}(Z_1;\,\theta)}, \quad \mathrm{E}(Z_1;\,\theta) \neq 0.$$

## Waldův test v $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost iid náhodných veličin, $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$,
- testujeme

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{proti} \quad H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2, \quad 0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \infty$$

## Waldův test v $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mu$ je známé

- kritická nerovnost testu $S(b,a)$ má tvar

$$h_b + ns < \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < h_a + ns,$$

kde

$$h_b = \frac{2b}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \;\; h_a = \frac{2a}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \;\; s = \frac{2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}.$$

- $\widehat{L}_S(\sigma^2)$
- $\widehat{\mathrm{E}}_S(N;\, \sigma^2)$

# Waldův test v N$(\mu, \sigma^2)$

$\mu$ je neznámé

- Zavedeme nové náhodné veličiny

$$Y_i = \frac{X_{i+1} - \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} X_i}{\sqrt{1+\frac{1}{i}}}, \qquad i = 1, 2, \dots;$$

- $Y_1, Y_2, \dots$ iid, $Y_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$,
- $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (X_i - \overline{X}_{n+1})^2$
- kritická nerovnost má nyní tvar

$$h_b + ns < \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 < h_a + ns.$$

# Děkujeme za pozornost!