

*Marie Hušková, Stano Nagy*

Tématická náplň:

- Sekvenční analýza
- Change point (detekce změny rozdělení)
- další témata upřesněna později

$X_1, X_2, \dots$  nezávislé

$X_i$  distr. funkci  $F$ , hustotu  $f$  vzhledem k  $\sigma$ -konečné míře  $\mu$

$$H_0 : f = f_0 \quad f = f_1$$

kde  $f_0, f_1$  jsou dané hustoty (jednoduchá hypotéza proti jednoduché alternativě)

$\alpha, \beta$  – chyby 1. a 2. druhu

$$P(\text{zam. } H_0 | H_0 \text{ platí}) = \alpha \quad P(\text{zam. } H_1 | H_1 \text{ platí}) = \beta$$

## Klasický přístup (Neyman – Pearson)

volíme  $n$  a  $\alpha$  a hledáme nejsilnější test

řešení:

je-li  $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq c$ , pak zamítáme  $H_0$ ,  
jinak nezamítáme

$c$  – určeno tak aby chyba 1. druhu byla  $\alpha$  ( hladina významnosti)

### A. Wald navrhl test:

je-li  $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \leq B$ , přijmeme  $H_0$ ,

je-li  $\prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq A$ , zamítáme  $H_0$ ,

je-li  $B < \prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} < A$ , pokračujeme

$B < A$  volíme, aby chyby 1. a 2. druhu byly  $\alpha$  resp.  $\beta$   
nahore popsán tzv. STOPPING RULE (zastavovací pravidlo)

V případě Walda, volíme  $\alpha, \beta$  a rozsah výběru je náhodná veličina, budeme značit  $N$

Platí

$$N = \min\left\{n; \prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \notin (B, A)\right\}$$

Je třeba stanovit  $A, B$  tak aby prstí chyb byly  $\alpha, \beta$

Lze aproximovat za určitých předpokladů následovně

$$B^* = \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad A^* = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Platí

$$\{\text{prij. } H_0, N = n\} = \left\{B < \prod_{i=1}^k \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} < A, k = 1, \dots, n-1, \prod_{i=1}^n \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \leq B\right\}$$

ozn.  $W_{0n} = \{prij. H_0, N = n\}$

$$\begin{aligned} P(prij. H_0, N = n | H_1 \text{ plati}) &= \int \cdot \int_{W_{0,n}} \prod_{i=1}^n f_1(x_i) d\mu(x_1) \cdot d\mu_{x_n} \\ &= \int \cdot \int_{W_{0,n}} \prod_{i=1}^n \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \prod_{j=1}^n f_0(x_j) d\mu(x_1) \cdot d\mu_{x_n} \\ &\leq B \int \cdot \int_{W_{0,n}} \prod_{j=1}^n f_0(x_j) d\mu(x_1) \cdot d\mu_{x_n} \\ &\leq B \cdot P(prij. H_0, N = n | H_1 \text{ plati}) \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} P(prij. H_0 | H_1 \text{ plati}) &= \sum_n P(prij. H_0, N = n | H_1 \text{ plati}) \\ &\leq B P(prij. H_0, N = n | H_1 \text{ plati}) \end{aligned}$$

$$P(\text{prij. } H_1 | H_1 \text{ plati}) = \sum_n P(\text{prij. } H_1, N = n | H_1 \text{ plati})$$

$$\geq AP(\text{prij. } H_0, N = n | H_0 \text{ plati})$$

Jestliže

$$P(\text{prij. } H_0 | H_i \text{ plati}) + P(\text{prij. } H_1 | H_i \text{ plati}) = 1, \quad i = 0, 1$$

pak

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} \leq B, \quad A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Pak použijeme aproximace  $B^*$ ,  $A^*$

$$B^* = \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq B, \quad A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} = A^*$$

ozn.  $\alpha^*, \beta^*$  hodnoty odpovídající  $B^*, A^*$ , pak

$$\frac{\beta^*}{1-\alpha^*} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \frac{1-\beta^*}{\alpha^*} \geq \frac{1-\beta}{\alpha}$$

a

$$\alpha^* \leq \frac{\alpha}{1-\beta}, \quad \beta^* \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\alpha + \beta \leq \alpha^* + \beta^*$$

## Referáty

- 1. Waldovy rovnosti dle skript str. 113– 124
- 2. Sekvenční testy, základní pojmy a vlastnosti – skripta, části kapitoly 1
- 3. Waldův sekvenční test dle skript, části kapitoly 2
- 4. Různé sekvenční testy včetně simulací – skripta plus simulace
- 5. Sekvenční intervaly dané délky – skripta a literatura, Handbook
- 6. Dvoustupňové a vícestupňové odhady – dle literatury , Handbook
- 7. Něco z historie a některé další sekvenční postupy – bude upřesněno
- 8. Change point - Razstoka- dle článku ( Antoch, Hušková)
- 9. Change point - postupné změny- dle článku (Hlávka, Hušková)
- Referáty 1,2,3,4,8,9 budou zadány. Další referáty budou upřesněny – v závislosti na počtu zapsaných studentů.