Teorie míry

Kapitoly 2–14 zahrnují nejzákladnější pojmy a výsledky z teorie míry. Výklad sleduje dvojí cíl: na jedné straně přiblížit fundamentální konstrukce v abstraktní teorii míry (generování vnější míry, Carathéodoryovu metodu vytváření míry z vnější míry, rozšíření pramíry na míru či aplikaci Dynkinových systémů k tvrzením o jednoznačnosti), na druhé straně ukázat využití abstraktního přístupu ke studiu d-rozměrné Lebesgueovy míry a Lebesgue-Stieltjesovy míry důležité obzvláště v teorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Zejména je důraz kladen na vlastnosti a prominentní postavení Lebesgueovy míry mezi Radonovými mírami v $\mathbb{R}^d$.

Tento text užívá pro zavedení Lebesgueovy míry klasický přístup založený na *vnější* aproximaci. Alternativní způsob založený na *vnitřní* aproximaci, na pojmu vnitřní míry, lze nalézt v textech pro studenty (Lebesgueova míra) na

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/`

V závěru textu (kapitola 15) jsou pro zájemce o hlubší pochopení látky připojeny poměrně rozsáhlé komentáře, historické poznámky a vybrané bibliografické odkazy.

Upozornění na nedostatky v textu a případné komentáře jsou vítány (`netuka@karlin.mff.cuni.cz`).

březen 2016

Ivan Netuka

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Teorie míry si klade za cíl vytvořit vhodný abstraktní a dostatečně flexibilní rámec pro vytvořemí adekvátního způsobu přiřazení číselné velikosti (= *míra*) určitým vyvoleným množinám (= *množinový systém*) ze zadané základní množiny (= *prostor*). Pod takovou číselnou velikostí si můžeme představit obsah rovinných obrazců, pravděpodobnost náhodných jevů, délku křivky v eukleidovském prostoru, hmotnost či objem tělesa v trojrozměrném prostoru, elektrický náboj, délku množiny na přímce atd., prakticky cokoli, u čeho lze očekávat vlastnost *aditivity*: velikost celku sestávajícího ze dvou částí, které nemají nic společného (= *jsou disjunktní*), je součtem velikostí obou částí. Množiny, kterým umíme velikost přiřadit, se nazývají *měřitelné*.

Intuitivně nám připadá zřejmé, co je délka úsečky, obsah obdélníku či objem kvádru. Přitom nezáleží na tom, jak jsou v příslušném prostoru umístěny (neboli shodným měřitelným množinám přiřazujeme stejnou velikost). Elementární úvaha nás na základě intuitivně přirozeného požadavku aditivity vede např. k délce lomené čáry v prostoru či k obsahu pravoúhlého trojúhelníku: úhlopříčka dělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Proto považujeme za velikost každého z nich polovinu obsahu obdélníku.

Libovolný trojúhelník je výškou rozdělen na sjednocení dvou pravoúhlých trojúhelníků (strany trojúhelníku jsou úsečky v rovině, jejichž velikost považujeme za nulovou). Tedy obsah trojúhelníku takto umíme určit.

Nemáme vlastně žádné pochybnosti o přijetí těchto přirozených pravidel:

(a) jsou-li dvě množiny shodné, mají stejnou míru (= v rovině obsah);

(b) jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ množiny, z nichž žádné dvě nemají společné body, pak míra množiny $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ je rovna součtu měr množin $A_1, \ldots, A_n$.

Takto nám elementární úvahy stačí např. na určení míry mnohoúhelníků.

Komplikace nastávají, uvažujeme-li o tom, co vlastně je obsah kruhu. Ten již jako *konečné* sjednocení mnohoúhelníků vyjádřit nelze. Kruh však je možné vyjádřit jako *spočetné* sjednocení (nepřekrývajících se) trojúhelníků např. takto: vepíšeme do kruhu rovnostranný trojúhelník, nad každou jeho stranou sestrojíme zřejmým způsobem rovnoramenný trojúhelník s třetím vrcholem na kružnici a postup opakujeme. Tak vytvoříme trojúhelníkovou mozaiku, která kruh vyplňuje (úsečky zanedbáváme).

Tento příklad dává motivaci pro novou vlastnost, kterou bychom od pojmu velikosti (= míry) očekávali: jestliže $A_1, A_2, \ldots$ je (nekonečná) posloupnost po dvou disjunktních množin, jejichž míry jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, pak sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ má velikost (= míru) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Užitím této vlastnosti (říká se jí *σ-aditivita*) bychom pomocí výše zmíněné trojúhelníkové mozaiky mohli obsah kruhu *definovat*. Je to však metoda velice speciální a vzniká navíc zřejmý problém: co vyjde, když se užije jiná mozaika?

Z dob školní docházky si připomeneme elementární přístup k zavedení míry rovinných obrazců. Uvažujme síť tvořenou přímkami rovnoběžnými s osami a procházejícími mřížovými body (tj. body s celočíselnými souřadnicemi). Pak síť zjemníme - přidáme přímky v poloviční vzdálenosti, proces opakujeme a dostaneme tak postupně čtverečky o délce strany 2^{-n}, které umožňují přibližně zdola a přibližně shora odhadnout „obsah“ obrazce D: sečte se obsah čtverečků obsažených v D a obsah čtverečků, jejichž sjednocení D obsahuje, a to postupně pro síť se vzdáleností přímek $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ V jednoduchých případech mají dolní a horní odhady společnou limitu $m(D)$, kterou je rozumné nazvat mírou (= obsahem) obrazce D. Takovou množinu D nazýváme *měřitelnou v Jordanově-Peanově smyslu* (pro krátkost: J.-P. *množinu*) a číslo $m(D)$ (definované analogicky i v prostorech $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, obecně) se nazývá *Jordanův-Peanův objem*.

Na J.-P. množinách má funkce m vlastnost aditivity, dokonce σ-aditivity, ovšem jen v této formě: jsou-li $A_1, A_2, \ldots$ J.-P. množiny a *navíc* $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je J.-P. množina, pak $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Uvedený typ aproximace, který je úspěšný pro množiny s jednoduchou geometrií, se nehodí např. pro „změření“ velikosti množiny $A := \{r_1, r_2, \ldots\}$ všech racionálních čísel z intervalu [0, 1]. Každá horní aproximace je ≥ 1, každá dolní aproximace je rovna 0. Přitom $A_n := \{r_n\}$ má Jordanův-Peanův objem roven 0 a $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ není J.-P. množina. Tedy někdy spočetné sjednocení J.-P. množin je J.-P. množina, jindy ne. Dá se říci, že pro J.-P. množiny neplatí příjemná pravila pro množinové počítání, neoperuje se s nimi dobře: systém J.-P. množin není uzavřený ke spočetným sjednocením, dokonce ani ke spočetným sjednocením intervalů v $\mathbb{R}$!

Pojem velikosti (= míry) množiny jde, jak víme, ruku v ruce s pojmem integrálu. Např. pro omezenou funkci $f : [a, b] \to [0, \infty)$ je

$$M := \{(x, y) : \ x \in [a, b], \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

J.-P. množina, právě když f je *riemannovsky* integrovatelná (a pak $m(M) = (R) \int_a^b f$).

Jedním z významných momentů pro formování teorie míry a integrálu byla snaha po nalezení obecného přístupu k zavedení *geometrické míry* v $\mathbb{R}^d$ definované (pokud možno) na *všech* podmnožinách. Ovšem zda lze elementární objem např. v $\mathbb{R}^3$ rozšířit na σ-aditivní množinovou funkci - to je velmi netriviální problém. Prozradíme již nyní, že z požadavku rozšíření na *úplně všechny množiny* je nutné slevit.

Mírou se rozumí *nezáporná σ-aditivní množinová funkce* definovaná na množinovém systému, na němž si přejeme bezproblémově manipulovat (kalkulovat) s množinami; například takový systém má být uzavřený vzhledem k rozdílu množin a ke spočetným sjednocením. Takové požadavky vedou k pojmu *σ-algebry*.

Na základě pojmu míry se přirozeným způsobem definuje abstraktní integrál, jehož vlastnosti jej předurčují k širokému uplatnění v matematice a jejích aplikacích.

Je to právě σ-aditivita, která

- stojí v pozadí dostatečně silných *vět o limitních přechodech za znamením integrálu*;
- je klíčem k mimořádně cenné vlastnosti prostorů integrovatelných funkcí – totiž k jejich *úplnosti*;
- v teorii pravděpodobnosti umožňuje dokázat fundamentální *limitní věty*.

Skutečnost, že se setkáváme se σ-aditivitou v různých situacích, často vzdálených od původních elementárních geometrických úvah, dává možnost rozsáhlého uplatnění teorie míry v analýze, geometrii a stochastice.

Kapitola 2

Měřitelný prostor

Je-li X množina, značíme $\mathcal{P}(X)$ systém všech podmnožin množiny X. Pro $A \in \mathcal{P}(X)$ místo $X \backslash A$ píšeme A^c. Nechť X je množina a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Říkáme, že $\mathcal{A}$ je **σ-algebra** (na X), jestliže platí:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(b) pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ je $A^c \in \mathcal{A}$;

(c) pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{A}$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, pak se dvojice $(X, \mathcal{A})$ nazývá **měřitelný prostor**. Zřejmě je každá σ-algebra uzavřená vzhledem ke konečným sjednocením a průnikům, k rozdílu množin a ke spočetným průnikům.

2.1. Jednoduché příklady σ-algeber.

(a) $\mathcal{P}(X)$;

(b) $\{\emptyset, X\}$;

(c) systém podmnožin, které jsou spočetné nebo mají spočetný doplněk.

Pro $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{S}$ σ-algebra (plyne bezprostředně z definice). Značí se $\sigma(\mathcal{S})$ a nazývá se **σ-algebra generovaná systémem $\mathcal{S}$**.

Je-li X topologický prostor a $\mathcal{S}$ je topologie (tj. systém všech otevřených množin v X), pak se $\sigma(\mathcal{S})$ značí $\mathcal{B}(X)$ a nazývá se **systém borelovských množin**. Pro $X := \mathbb{R}^d$ píšeme $\mathcal{B}^d$ místo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2.2. Cvičení (o disjunktním sjednocení)**.** Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost podmnožin množiny X, $B_n := A_n \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j,\ n \in \mathbb{N}$. Potom množiny $B_n,\ n \in \mathbb{N}$, jsou *po dvou disjunktní* a je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dále platí rovnost $B_n = \left(A_n^c \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)^c$. Jestliže $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém uzavřený vzhledem k doplňku a ke konečným sjednocením, pak $\mathcal{A}$ je σ-algebra, právě když systém $\mathcal{A}$ je uzavřený vzhledem ke spočetným *disjunktním* sjednocením.

Kapitola 3

Prostor s mírou

Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá **míra**, jestliže

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$ (tedy μ je σ-*aditivní*).

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá **prostor s mírou**. Je-li $\mu(X) = 1$, pak se μ nazývá **pravděpodobnostní míra** a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **pravděpodobnostní prostor**.

Zřejmě je každá míra μ **konečně aditivní**, neboli pro množiny $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, které jsou po dvou disjunktní, platí $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$. Jestliže $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ a $\mu(A) < \infty$, pak $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Množina $N \subset X$ se nazývá **zanedbatelná** (podrobněji: $(X, \mathcal{A}, \mu)$-zanedbatelná), jestiže existuje množina $B \in \mathcal{A}$ taková, že $N \subset B$ a $\mu(B) = 0$. Systém všech zanedbatelných množin značíme $\mathcal{N}(\mu)$.

3.1. Jednoduché příklady měr.

(a) Pro $x \in X$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$, definujeme $\varepsilon_x(A) = 1$, pokud $x \in A$ a $\varepsilon_x(A) = 0$, pokud $x \notin A$. Míra ε_x se nazývá **Diracova míra soustředěná v bodě** x.

(b) Je-li $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$, pro $A \subset X$ nechť $\mu(A)$ je počet prvků množiny A, pokud A je konečná, $\mu(A) = \infty$, pokud A je nekonečná. Míra μ se nazývá **aritmetická** (nebo **počítací**) **míra** na X.

(c) Je-li $X := \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\alpha_n \in [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \alpha_n \ \Big(:= \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in A,\, j \leq n} \alpha_j \Big).$$

Potom $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ je prostor s mírou.

(d) Nechť X je nespočetná množina a $\mathcal{A}$ je systém množin, které jsou spočetné nebo mají spočetný doplněk. Pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme $\mu(A) = 0$, pokud A je spočetná, $\mu(A) = 1$, pokud A^c je spočetná. Potom $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

3.2. Fundamentální příklad míry (Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^d$)**.** Existuje právě jedna míra λ_d na $\mathcal{B}^d$, která každému intervalu v $\mathbb{R}^d$ přiřazuje jeho objem. Míra λ_d je invariantní vůči posunutí, tj. pro každou množinu $A \in \mathcal{B}^d$ a každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $\lambda_d(A + x) = \lambda_d(A)$.

Označme $\mathcal{L}^d := \{A \cup N : A \in \mathcal{B}^d,\ N \in \mathcal{N}(\lambda_d)\}$. Potom $\mathcal{L}^d$ je σ-algebra a existuje právě jedno rozšíření míry λ_d na míru definovanou na $\mathcal{L}^d$ (rozšíření budeme značit také λ_d).

Množiny z $\mathcal{L}^d$ se nazývají **lebesgueovsky měřitelné množiny** a míra λ_d na $\mathcal{L}^d$ se nazývá **Lebesgueova míra** v $\mathbb{R}^d$.

Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $A \in \mathcal{L}^d$;

(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená množina A' a otevřená množina A'' takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\lambda_d(A'' \setminus A') < \varepsilon$;

(iii) existují množina A' typu K_σ (tj. spočetné sjednocení kompatních množin) a množina A'' typu G_σ (tj. spočetný průnik otevřených množin) takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\lambda_d(A'' \setminus A') = 0$.

Je-li μ míra na $\mathcal{B}^d$, která je invariantní vůči posunutí a $\mu([0,\, 1]^d) = 1$, potom $\mu = \lambda_d$. (Viz věty 12.3 a 13.1 a poznámka 12.4(a).)

3.3. Důležitý příklad (Lebesgueova-Stieltjesova míra)**.** Nechť $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Potom existuje právě jedna míra μ_G na $\mathcal{B}^1$ taková, že

$$\mu_G((a,\, b]) = G(b) - G(a)\,, \quad a,\, b \in \mathbb{R},\ a < b\,.$$

Označme $\mathcal{S}_G := \{A \cup N :\ A \in \mathcal{B}^1,\ N \in \mathcal{N}(\mu_G)\}$. Potom $\mathcal{S}_G$ je σ-algebra a existuje právě jedno rozšíření míry μ_G na míru definovanou na $\mathcal{S}_G$ (rozšíření budeme značit také μ_G).

Míra μ_G na $\mathcal{S}_G$ se nazývá **Lebesgueova-Stieltjesova míra** generovaná funkcí G. (Viz věta 10.7 a poznámka 10.8(a).)

Jestliže $G : x \mapsto x$, pak zřejmě $\mathcal{S}_G = \mathcal{L}^1$ a $\mu_G = \lambda_1$. Je tedy Lebesgueova míra λ_1 definovaná na $\mathcal{L}^1$ speciálním případem Lebesgueovy-Stieltjesovy míry na $\mathbb{R}$.

Následující věta ukazuje, že $\mathcal{L}^1 \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3.4. Věta (o existenci neměřitelné množiny)**.** *Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}$ a μ je míra na $\mathcal{A}$, která je invariantní vůči posunutí a každému intervalu přiřazuje jeho délku. Je-li $A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A) > 0$, potom existuje $B \subset A$, $B \notin \mathcal{A}$.*

Důkaz. Zřejmě existuje otevřený interval I délky 1 takový, že $\mu(A \cap I) > 0$. Protože μ je invariantní vůči posunutí, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $A \subset (0, 1)$.

Řekněme, že bod $x \in \mathbb{R}$ je v relaci s bodem $y \in \mathbb{R}$, jestliže $x - y \in \mathbb{Q}$. Pišme $x \sim y$, jestliže x je v relaci s y. Zřejmě má tato relace za následek rozklad $\mathbb{R}$ na třídy ekvivalence. Označme $\mathcal{T}$ systém těchto tříd ekvivalence. Pro každé $\emptyset \neq T \in \mathcal{T}$ je zřejmě $T \cap (0, 1) \neq \emptyset$. Z axiomu výběru plyne, že existuje množina M, která z každé množiny $T \cap (0, 1)$, $T \in \mathcal{T}$, obsahuje právě jeden prvek. Nechť $r_1, r_2, \ldots$ je prostá posloupnost všech racionálních čísel z $(-1, 1)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $M_n := M + r_n$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset (-1, 2)$. Nechť $m \neq n$. Kdyby existoval bod $z \in M_n \cap M_m$, existovaly by body $x, y \in M$ takové, že $z = x + r_n = y + r_m$. Pak by platilo $x - y = r_m - r_n \neq 0$ a x, y by byly různé body z M, pro něž $x \sim y$. Dokázali jsme, že množiny M_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní. Je-li $y \in \mathbb{R}$, pak existují $r \in \mathbb{Q}$ a $x \in M$ takové, že $y = x + r$. Jestliže $y \in (0, 1)$, pak $|r| = |y - x| < 1$, tudíž existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $r = r_n$ a $y \in M_n$. Odtud plyne, že $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Definujme $A_n := A \cap M_n$. Předpokládejme, že $A_n \in \mathcal{A}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; odvodíme spor. Protože $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\mu(A) > 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(A_m) > 0$. Definujme $S_n := A_m - r_m + r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $S_n \in \mathcal{A}$. Jestliže $z \in S_n$, existuje $u \in A_m$ takové, že $z = u - r_m + r_n$. Protože $u \in M_m$, existuje $x \in M$ takové, že $u = x + r_m$, neboli $z = x + r_n \in M_n$. Dokázali jsme, že $S_n \subset M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tudíž množiny S_n jsou po dvou disjunktní. Zřejmě $\mu(S_n) = \mu(A_m) > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Jelikož $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset (-1, 2)$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\big) \leq \mu((-1, 2)) = 3$. Na druhé straně, protože $\mu(S_n) = \mu(A_m) > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) = \infty,$$

což je spor. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro $B := A_n$, je $B \subset A$ a $B \notin \mathcal{A}$. $\square$

3.5. Věta (základní vlastnosti míry)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou. Potom platí:*

(a) (monotonie) *je-li* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, *potom* $\mu(A) \leq \mu(B)$*;*

(b) (subaditivita) *je-li* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost množin z* $\mathcal{A}$, *potom* $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq$ $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*;*

(c) (spojitost zdola) *je-li* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost množin z* $\mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *potom* $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} A_n$*;*

(d) (spojitost shora) *je-li* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost množin z* $\mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *a* $\mu(A_1) < \infty$, *potom* $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Důkaz. (a) Je-li $A \subset B$, je $\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

(b) Definujme $B_n := A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j,\ n \in \mathbb{N}$. Víme (cvičení 2.2), že $B_n \in \mathcal{A},\ B_n \subset A_n$, množiny B_n jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Podle (a) je

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(c) Nechť $A_0 := \emptyset$. Můžeme předpokládat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(A_n) < \infty$. Platí

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1})\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

neboť $\mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}),\ j \in \mathbb{N}$.

(d) Položme $B_n := A_1 \setminus A_n,\ n \in \mathbb{N}$. Potom $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ a $A_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Podle (c) dostáváme

$$\mu(A_1) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

neboť, díky konečnosti $\mu(A_n),\ \mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n),\ n \in \mathbb{N}$. Odečtením $\mu(A_1)$ dostaneme výsledek. □

3.6. Příklad. Nechť μ je aritmetická míra na $\mathbb{N}$ a $A_n := \{n, n+1, \ldots\}$. Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, takže $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0$ a $\mu(A_n) = \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Vlastnost spojitosti shora tedy obecně neplatí.

3.7. Věta. *Nechť μ je míra definovaná na $\mathcal{B}^1$ a konečná na omezených borelovských množinách. Definujme $G(x) := \mu((0, x])$ pro $x \ge 0$ a $G(x) := -\mu((x, 0])$ pro $x < 0$. Potom je G neklesající zprava spojitá funkce a pro $a < b$ platí $\mu((a, b]) = G(b) - G(a)$. Je-li navíc míra μ konečná (tj. $\mu(\mathbb{R}) < \infty$) a*

$$F(x) := \mu((-\infty, x\,]),\ x \in \mathbb{R},$$

potom F je neklesající zprava spojitá funkce na $\mathbb{R}$, pro niž $F(-\infty+) = 0,\ F(\infty-) = \mu(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť $0 \le x < y$. Protože $(0, x] \subset (0, y]$, monotonie míry dává $G(x) \le G(y)$. Je-li $x < y < 0$, je $(y, 0] \subset (x, 0]$, tedy $\mu((y, 0]) \le \mu((x, 0])$, neboli $G(x) \le G(y)$. Odtud plyne, že G je neklesající.

Nechť $x \in \mathbb{R}$ a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost čísel z intervalu (x, ∞) s limitou x. Je-li $x \ge 0$, potom je $\{(0, x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost borelovských množin, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, x_n] = (0, x]$ a $\mu((0, x_1]) < \infty$. Spojitost shora dává $\lim_{n\to\infty} \mu((0, x_n]) = \mu((0, x])$, tedy $\lim_{n\to\infty} G(x_n) = G(x)$. Je-li $x < 0$, je $\{(x_n, 0]\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost borelovských množin a $\bigcup_{n=1}^{\infty}((x_n, 0]) = (x, 0]$.

Ze spojitosti zdola dáváme $\lim_{n\to\infty} \mu((x_n, 0]) = \mu((x, 0])$, neboli $\lim_{n\to\infty} G(x_n) = G(x)$. Dokázali jsme, že funkce G je zprava spojitá. Zřejmě $\mu((a, b]) = G(b) - G(a),\ a < b$.

Nechť μ je konečná míra a $c := \mu((-\infty, 0])$. Potom $F(x) = c + G(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy F je neklesající a zprava spojitá. Protože $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n] = \mathbb{R}$, platí $F(\infty-) = \mu(\mathbb{R})$. Dále $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, -n] = \emptyset$ a $\mu((-\infty, -1]) < \infty$. Platí tedy $F(-\infty+) = 0$. $\square$

3.8. Věta (Cantelliovo lemma)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin z $\mathcal{A}$ a

$$A := \{x \in X :\ x \in A_n \text{ pro nekonečně } n \in \mathbb{N}\}.$$

Potom $A = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$, potom $\mu(A) = 0$.

Důkaz. Vyjádření množiny A je zřejmé. Volme $\varepsilon > 0$ a $j \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n=j}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon$. Potom $\mu(A) \le \mu\big(\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n\big) \le \sum_{n=j}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\mu(A) = 0$. $\square$

Kapitola 4

Dynkinův systém

Začněme touto motivační úvahou. Nechť X je množina, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro všechna $S \in \mathcal{S}$. Označme $\mathcal{T} := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) : \ \mu(A) = \nu(A)\}$. Je zřejmé, že pro $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}$ platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$, *pokud* jsou množiny $A_1, A_2, \ldots$ *po dvou disjunktní*. Je-li např. navíc $X \in \mathcal{S}$ a $\mu(X) < \infty$, pak také $A^c \in \mathcal{T}$ pro každé $A \in \mathcal{T}$. V takovém případě se tedy rovnost měr μ a ν přenáší z $\mathcal{S}$ na nejmenší množinový systém, který obsahuje $\mathcal{S}$ a je uzavřený vůči doplňku a sjednocení spočetného systému *po dvou disjunktních množin*. Proto je užitečné množinové systémy s touto vlastností studovat.

Nechť X je libovolná množina a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom se $\mathcal{D}$ nazývá **Dynkinův systém** (na množině X), když má tyto vlastnosti:

(a) $X \in \mathcal{D}$;

(b) $A^c \in \mathcal{D}$, kdykoliv $A \in \mathcal{D}$;

(c) je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost *po dvou disjunktních* množin z $\mathcal{D}$, potom je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Pro krátkost budeme místo Dynkinův systém říkat *D-systém*. Zřejmě každý D-systém $\mathcal{D}$ obsahuje $\emptyset$ a pro $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, je také $B \backslash A \in \mathcal{D}$, neboť $B \backslash A = (A \cup B^c)^c$. Samozřejmě každá σ-algebra je D-systém.

Je-li $n \in \mathbb{N}$ a X konečná množina sestávající se z $2n$ prvků, definujme $\mathcal{D}$ jako systém všech podmnožin sestávajících ze sudého počtu prvků. Pak $\mathcal{D}$ je D-systém a pro $n > 1$ není $\mathcal{D}$ σ-algebra.

4.1. Věta. *Nechť $\mathcal{D}$ je D-systém. Pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra, právě když průnik každých dvou množin z $\mathcal{D}$ je prvkem $\mathcal{D}$.*

Důkaz. Víme, že každá σ-algebra je uzavřená vzhledem (dokonce spočetným) průnikům. Předpokládejme, že $\mathcal{D}$ je D-systém obsahující s každými dvěma množinami jejich průnik. Je-li $A, B \in \mathcal{D}$, pak $A \cap B \in \mathcal{D}$, $A \cap B \subset A$, tudíž $A \backslash B = A \backslash (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Z vlastnosti (c) z definice D-systému plyne, že také $A \cup B = (A \backslash B) \cup B \in \mathcal{D}$. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathcal{D}$. Položme $B_0 := \emptyset,\ B_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n,\ n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \backslash B_{n-1}) \in \mathcal{D}$$

opět podle (c) z definice D-systému. Tudíž $\mathcal{D}$ je σ-algebra. □

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, potom existuje nejmenší D-systém obsahující $\mathcal{S}$ (ten je definován jako průnik všech D-systémů, které $\mathcal{S}$ obsahují). Tento D-systém se značí $\delta(\mathcal{S})$ a nazývá *D-systém generovaný systémem $\mathcal{S}$*. Zřejmě vždy platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$.

4.2. Věta. *Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ obsahuje průnik každých dvou množin z $\mathcal{S}$. Potom $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Protože $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$, stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ je σ-algebra. Podle věty 4.1 k tomu stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ obsahuje s každými dvěma množinami jejich průnik. Zvolme $A \in \delta(\mathcal{S})$ a vyšetřujme pomocný systém

$$\mathcal{D}_A := \{Q \in \mathcal{P}(X) :\ Q \cap A \in \delta(\mathcal{S})\}.$$

Zřejmě $X \in \mathcal{D}_A$. Je-li $Q \in \mathcal{D}_A$, je $Q^c \in \mathcal{D}_A$, neboť $Q^c \cap A = A \backslash (Q \cap A) \in \delta(\mathcal{S})$. Sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních množin z $\mathcal{D}_A$ je zřejmě prvkem $\mathcal{D}_A$. Dokázali jsme tedy: Pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ je $\mathcal{D}_A$ D-systém. Nechť $B \in \mathcal{S}$. Podle předpokladu o $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_B$, tudíž $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_B$, neboť $\mathcal{D}_B$ je D-systém. Dokázali jsme, že $A \cap B \in \delta(\mathcal{S})$ pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ a $B \in \mathcal{S}$. Odtud plyne, že pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ je $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ a tudíž $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_A$, neboť $\mathcal{D}_A$ je D-systém. Jinými slovy: $A \cap B \in \delta(\mathcal{S})$, kdykoliv $A, B \in \delta(\mathcal{S})$. □

4.3. Věta. *Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ obsahuje s každými dvěma množinami jejich průnik a nechť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost množin z $\mathcal{S}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Nechť μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro všechna $S \in \mathcal{S}$ a nechť $\mu(S_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mu(A) = \nu(A)$ pro všechna $A \in \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Zvolme nejprve množinu $B \in \mathcal{S}$ takovou, že $\mu(B) < \infty$. Definujme

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) :\ \mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)\}.$$

Potom $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_B$ a zřejmě $X \in \mathcal{D}_B$. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin z $\mathcal{D}_B$, které jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \cap B) = \nu\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)\,,$$

takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_B$. Je-li $A \in \mathcal{D}_B$, pak

$$\mu(A^c \cap B) = \mu(B \backslash (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A^c \cap B),$$

tudíž $A^c \in \mathcal{D}_B$ (zde jsme užili, že $\mu(B) < \infty$). Tím je dokázáno, že $\mathcal{D}_B$ je D-systém obsahující $\mathcal{S}$, tedy podle věty 4.2 dostáváme $\sigma(\mathcal{S}) = \delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_B \subset \sigma(\mathcal{S})$. Pro každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{S})$ a pro každou $B \in \mathcal{S}$, pro niž $\mu(B) < \infty$, tedy platí $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$. Speciálně pro každou $A \in \sigma(\mathcal{S})$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(A \cap S_n) = \nu(A \cap S_n)$. Spojitost zdola dává $\mu(A) = \nu(A)$. $\square$

Kapitola 5

Úplný prostor s mírou

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Připomeňme, že množina $A \subset X$ se nazývá *zanedbatelná* (podrobněji: $(X, \mathcal{A}, \mu)$-zanedbatelná), jestliže existuje množina $B \in \mathcal{A}$ taková, že $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$. Systém všech zanedbatelných množin značíme $\mathcal{N}(\mu)$.

5.1. Příklad. Nechť $X := \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{A} := \{\emptyset, X, \{0\}, X \backslash \{0\}\}$ a pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme $\mu(A) = 1$, pokud $0 \in A$, $\mu(A) = 0$, pokud $0 \notin A$. Potom $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $\{1\} \in \mathcal{N}(\mu) \backslash \mathcal{A}$ (existuje tedy neměřitelná zanedbatelná množina).

Říkáme, že $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je **úplný prostor s mírou**, jestliže každá zanedbatelná množina je měřitelná, tedy $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{A}$.

5.2. Věta (o zúplnění prostoru s mírou)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $\widehat{\mathcal{A}}$ je systém všech množin $A \subset X$, pro něž existuje dvojice (A', A'') množin z X taková, že*

$$A', A'' \in \mathcal{A}, \qquad A' \subset A \subset A'' \qquad a \qquad \mu(A'' \backslash A') = 0. \tag{5.1}$$

Pro $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ definujeme

$$\widehat{\mu}(A) := \inf\{\, \mu(B) : \ A \subset B \in \mathcal{A}\,\}.$$

Potom $\widehat{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ je úplný prostor s mírou.

Důkaz. Budeme říkat, že dvojice (A', A'') je *aproximující pro množinu* $A \subset X$, jestliže platí (5.1). Zřejmě je dvojice $\{\emptyset, \emptyset\}$ aproximující pro $\emptyset$, tedy $\emptyset \in \widehat{\mathcal{A}}$. Je-li $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ a (A', A'') je aproximující pro A, potom $\big((A'')^c, (A')^c\big)$ je aproximující pro A^c, tedy $A^c \in \widehat{\mathcal{A}}$. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost množin z $\widehat{\mathcal{A}}$, (A'_n, A''_n) je aproximující dvojice pro A_n, $n \in \mathbb{N}$, potom $\big(\bigcup_{n=1}^\infty A'_n, \bigcup_{n=1}^\infty A''_n\big)$ je aproximující pro $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Dokázali jsme, že $\widehat{\mathcal{A}}$ je σ-algebra.

Nechť $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ a (A', A'') je aproximující pro A. Potom

$$\begin{aligned}\mu(A') &= \inf\{\, \mu(B) : \ A' \subset B \in \mathcal{A}\,\} \le \inf\{\, \mu(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\,\} \\ &\le \inf\{\, \mu(B) : A'' \subset B \in \mathcal{A}\,\} = \mu(A'') = \mu(A') + \mu(A'' \backslash A') = \mu(A'),\end{aligned}$$

tedy

$$\widehat{\mu}(A) = \mu(A') = \mu(A'').$$

Z definice $\widehat{\mu}$ vidíme, že $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{A}$.

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\widehat{\mathcal{A}}$. Je $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widehat{\mathcal{A}}$. Nechť (A'_n, A''_n) je aproximující pro A_n, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A''_n\right)$ je aproximující pro A, tudíž

$$\widehat{\mu}(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}(A_n),$$

neboť $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$.

Dokázali jsme, že $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ je prostor s mírou.

Nechť množina N je $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$-zanedbatelná. Existuje tedy množina $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ taková, že $N \subset A$ a $\widehat{\mu}(A) = 0$. Nechť (A', A'') je aproximující pro A. Potom $\mu(A'') = \widehat{\mu}(A) = 0$ a $(\emptyset, A'')$ je aproximující pro N, tedy $N \in \widehat{\mathcal{A}}$.

Dokázali jsme, že $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ je úplný prostor s mírou. $\square$

Prostor $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ se nazývá **zúplnění prostoru** $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\widehat{\mathcal{A}}$ se nazývá **zúplnění σ-algebry $\mathcal{A}$** vzhledem k míře μ a $\widehat{\mu}$ se nazývá **zúplnění míry** μ.

5.3. Poznámka. Je-li $\tilde{\mu}$ míra na σ-algebře $\widehat{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$, $A \in \widehat{\mathcal{A}}$ a (A', A'') je aproximující pro A, pak $\mu(A') = \tilde{\mu}(A') \le \tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(A'') = \mu(A'')$. Víme, že $\widehat{\mu}(A) = \mu(A') = \mu(A'')$, takže míry $\tilde{\mu}$ a $\widehat{\mu}$ se rovnají na $\widehat{\mathcal{A}}$. Tudíž $\widehat{\mu}$ je jediná míra rozšiřujcí μ z $\mathcal{A}$ na míru na $\widehat{\mathcal{A}}$.

Dále je užitečné si uvědomit, že $\widehat{\mathcal{A}} = \{A \cup N : \ A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}(\mu)\}$. Je-li totiž $C \in \widehat{\mathcal{A}}$ a (A', A'') je aproximující pro C, stačí zvolit $A := A'$ a $N := A'' \setminus C$. Je-li $A \in \mathcal{A}$ a $N \in \mathcal{N}(\mu)$, existuje $B \in \mathcal{A}$ taková, že $N \subset B$ a $\mu(B) = 0$. Potom $(A, A \cup B)$ je aproximující pro $A \cup N$ a tudíž $A \cup N \in \widehat{\mathcal{A}}$.

Kapitola 6

Radonova míra v $\mathbb{R}^d$

Nechť X je topologický prostor a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom μ se nazývá **topologická míra**, jestliže $\mathcal{A}$ obsahuje všechny otevřené množiny (a tudíž $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$).

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s topologickou mírou. Míra μ se nazývá **lokálně konečná**, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje (otevřené) okolí V bodu x takové, že $\mu(V) < \infty$. (Pro případ $X := \mathbb{R}^d$ je tato podmínka ekvivalentní s touto podmínkou: pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ je $\mu(K) < \infty$.)

Míra μ se nazývá **zevnitř regulární**, jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : \ K \subset A, \ K \text{ kompaktní} \}.$$

Míra μ se nazývá **Radonova míra** na X, jestliže μ je topologická úplná lokálně konečná míra, která je zevnitř regulární.

Zde se budeme zabývat pouze Radonovými mírami na $\mathbb{R}^d$. Pro $m \in \mathbb{N}$ definujeme $B_m := \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x| \leq m\}$.

6.1. Věta (o struktuře měřitelných množin)**.** *Nechť μ je Radonova míra na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A})$ a $A \subset \mathbb{R}^d$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$A \in \mathcal{A}$;*

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená množina A' a otevřená množina A'' takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \setminus A') < \varepsilon$;*

(iii) *existují množina A' typu K_σ a množina A'' typu G_δ takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \setminus A') = 0$.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Označme $L_1 := B_1, L_n := B_{n+1} \setminus B_n$, $A_n := A \cap L_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mu(A_n) < \infty$ a existuje kompaktní množina $K_n \subset A_n$ taková, že platí

$\mu(K_n) > \mu(A_n) - \varepsilon \cdot 2^{-n-1}$. Definujme $A' := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Potom $A' \subset A$ a

$$\mu(A \backslash A') = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \backslash K_n) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Množina A' je uzavřená, neboť pro každé $m \in \mathbb{N}$ je množina $A' \cap B_m$ uzavřená.

Protože $A^c \in \mathcal{A}$, existuje (podle první části důkazu) uzavřená množina B taková, že $B \subset A^c$ a $\mu(A^c \backslash B) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom $A'' := B^c$ je otevřená množina, $A \subset A''$ a platí odhad $\mu(A'' \backslash A) = \mu(B^c \backslash A) = \mu(A^c \backslash B) < \frac{1}{2}\varepsilon$, tudíž $\mu(A'' \backslash A') = \mu(A'' \backslash A) + \mu(A \backslash A') < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují uzavřená množina A'_n a otevřená množina A''_n takové, že $A'_n \subset A \subset A''_n$ a $\mu(A''_n \backslash A'_n) < n^{-1}$. Definujme $A' := \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$, $A'' := \bigcap_{n=1}^{\infty} A''_n$. Potom A' je typu K_σ, neboť $A' = \bigcup\{A'_n \cap B_m : m, n \in \mathbb{N}\}$, A'' typu G_δ, $A' \subset A \subset A''$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(A'' \backslash A') \leq \mu(A''_n \backslash A'_n) < n^{-1}$, tedy $\mu(A'' \backslash A') = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Množina A je sjednocením borelovské množiny A' a zanedbatelné množiny $A \backslash A'$. Protože μ je úplná topologická míra, je $A \backslash A' \in \mathcal{A}$, tedy $A \in \mathcal{A}$. □

6.2. Věta (charakterizace Radonových měr)**.** *Nechť* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) μ *je Radonova míra;*

(ii) μ *je zúplněním lokálně konečné míry definované na* $\mathcal{B}^d$*.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť μ je Radonova míra. Víme, že $\mathcal{B}^d \subset \mathcal{A}$. Označme $\mu_0 := \mu_{|\mathcal{B}^d}$. Zřejmě je μ_0 lokálně konečná míra. Označme $(\mathcal{R}^d, \widehat{\mathcal{B}}^d, \widehat{\mu}_0)$ zúplnění prostoru $(\mathcal{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu_0)$.

Nechť $A \in \widehat{\mathcal{B}}^d$ a nechť (A', A'') je aproximující pro A. Potom $A \backslash A' \subset A'' \backslash A'$, tedy $A \backslash A'$ je $(\mathcal{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu_0)$-zanedbatelná. Protože $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{B}^d$, je $A \backslash A'$ také $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, \mu)$-zanedbatelná. Jelikož je míra μ úplná, je $A \backslash A' \in \mathcal{A}$, tudíž také $A \in \mathcal{A}$, a

$$\mu(A) = \mu(A') = \mu_0(A') = \widehat{\mu}_0(A)\,.$$

Nechť $A \in \mathcal{A}$. Podle věty 6.1 existují borelovské množiny A', A'' takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \backslash A') = 0$. Tudíž (A', A'') je aproximující pro A, a proto $A \in \widehat{\mathcal{B}}^d$. Protože μ je úplná míra, je $\mu(A \backslash A') = 0$ a platí $\mu(A) = \mu(A') + \mu(A \backslash A') = \mu(A')$ a $\widehat{\mu}_0(A) = \mu_0(A') = \mu(A')$, neboli $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{B}}_0$, $\mu = \widehat{\mu}_0$. Vidíme, že μ je zúplněním míry μ_0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť μ_0 je lokálně konečná míra definovaná na $\mathcal{B}^d$ a μ je její zúplnění definované na σ-algebře $\mathcal{A}$. Zřejmě je μ lokálně konečná a úplná. Dokážeme, že μ je zevnitř regulární. Definujeme

$$\mathcal{R} := \{\, A \in \mathcal{A} : \text{ existuje } A' \text{ typu } K_\sigma,\ A' \subset A,\ \mu(A \backslash A') = 0 \,\}, \mathcal{S} \ := \{\, A \in \mathcal{R} : \ A^c \in \mathcal{R} \,\}.$$

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin z $\mathcal{R}$ a $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tvrdíme, že pak je $A \in \mathcal{R}$. Je-li $\mathcal{K}_n$ spočetný systém kompaktních podmnožin množiny A_n takový, že

$$\mu\big(A_n \backslash \bigcup \{K : \ K \in \mathcal{K}_n\}\big) = 0\,,$$

pak $\mathcal{K} := \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{K}_n$ je spočetný systém kompaktních podmnožin množiny A. Protože

$$A\backslash\bigcup\{K:\ K\subset\mathcal{K}\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(A_n\backslash\bigcup\{K:\ K\in\mathcal{K}_n\}\big)\,,$$

je $\mu\big(A\backslash\{K:\ K\in\mathcal{K}\}\big)=0$ a tedy $A\in\mathcal{R}$.

Nechť $A_n\in\mathcal{R}$ a $A:=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. Dokážeme, že $A\in\mathcal{R}$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje posloupnost $\{K_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ kompaktních množin taková, že $K_{nk}\subset A_n$ a $\mu\big(A_n\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}K_{nk}\big)=0$. Definujme $K'_{nj}:=\bigcup_{k=1}^{j}K_{nk}$. Potom pro každou množinu $M\in\mathcal{A}$ platí

$$\mu(M\cap A_n)=\lim_{j\to\infty}\mu(M\cap K'_{nj}),\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Tudíž pro každé m a každé $n\in\mathbb{N}$ existuje $j(m,\,n)\in\mathbb{N}$ takové, že (za M zvolíme $A_n\cap B_m$)

$$\mu\big((A_n\cap B_m)\cap K'_{nj(m,\,n)}\big)\geq\mu\big((A_n\cap B_m)\big)-2^{-(m+n)}.$$

Definujme $K_m:=\bigcap_{n=1}^{\infty}K'_{nj(m,\,n)}$. Potom K_m je kompaktní podmnožina množiny A, neboť $K'_{nj(m,\,n)}\subset A_n$ pro každé n. Protože $(A\cap B_m)\backslash K_m\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\big((A_n\cap B_m)\backslash K'_{nj(m,\,n)}\big)$, platí

$$\mu\Big((A\cap B_m)\backslash K_m\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\Big((A_n\cap B_m)\backslash K'_{nj(m,\,n)}\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(m+n)}=2^{-m}\,.$$

Množina $K:=\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$ je množina typu K_σ, $K\subset A$ a pro každé $k\in\mathbb{N}$ a $m\geq k$ platí

$$\mu\Big((A\cap B_k)\backslash K\Big)\leq\mu\Big((A\cap B_m)\backslash K_m\Big)\leq 2^{-m}\,.$$

Vidíme, že tedy platí $\mu\big((A\cap B_k)\backslash K\big)=0$ pro každé $k\in\mathbb{N}$, tedy $\mu(A\backslash K)=0$, neboť $A\backslash K==\bigcup_{k=1}^{\infty}\big((A\cap B_k)\backslash K\big)$. Dokázali jsme, že $A\in\mathcal{R}$. Dokážeme, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra. Zřejmě $\emptyset\in\mathcal{S}$ (neboť $\emptyset$ a $\mathbb{R}^d$ jsou typu K_σ). Je-li $A\in\mathcal{S}$, je $A^c\in\mathcal{R}$ a také $(A^c)^c=A\in\mathcal{R}$, tedy $A^c\in\mathcal{S}$.

Již víme, že systém $\mathcal{R}$ je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením a spočetným průnikům, tedy $\mathcal{S}$ je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením. Vidíme, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra.

Každá otevřená množina a každá uzavřená množina je typu K_σ, proto systém otevřených množin je obsažen v $\mathcal{S}$. Tudíž $\mathcal{B}^d\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$.

Nechť $A\in\mathcal{A}$. Protože μ je zúplněním míry definované na $\mathcal{B}^d$ existuje množina $\tilde{A}\in\mathcal{B}^d$, $\tilde{A}\subset A$, taková, že $\mu(A\backslash\tilde{A})=0$. Protože $\mathcal{B}^d\subset\mathcal{R}$, existují kompaktní množiny $K_j\subset\tilde{A}$, $j\in\mathbb{N}$, takové, že $\mu\big(\tilde{A}\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\big)=0$. Odtud

$$\mu(A)=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n}K_j\Big)\leq\sup\{\,\mu(K):\ K\subset A,\ K\text{ kompaktní }\}\leq\mu(A)$$

a tudíž μ je zevnitř regulární. □

6.3. Poznámka. Nechť $(\mathbb{R}^d,\,\mathcal{A},\,\mu)$ je prostor s Radonovou mírou. Potom $\mathcal{A}$ je zúplnění $\mathcal{B}^d$ vzhledem k $\mu_{|\mathcal{B}^d}$. Viz úvaha v důkazu implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) věty 6.2.

Kapitola 7

Vnější Lebesgueova míra

Body prostoru $\mathbb{R}^d$ budeme zapisovat ve tvaru $a := (a_1, \dots, a_d)$, $x := (x_1, \dots, x_d)$ apod. Nechť a, $b \in \mathbb{R}^d$. **Polouzavřeným intervalem** zde rozumíme množinu

$$(a, b] := \big\{x \in \mathbb{R}^d : \ a_j < x_j \le b_j, \ j \in \{1, \dots, d\}\big\}.$$

Systém všech polouzavřených intervalů značíme $\mathcal{J}^d$. Je-li $I := (a, b] \in \mathcal{J}^d$, pak je buďto $I = \emptyset$ nebo pro každé $j \in \{1, \dots, d\}$ je $a_j = \inf\{x_j : \ x \in I\}$, $b_j = \sup\{x_j : \ x \in I\}$. Pokud tedy $I \neq \emptyset$, vyjádření I ve tvaru $(a, b]$ je jednoznačné. Pro $I \in \mathcal{J}^d$ definujeme **objem** $\lambda_d(I)$ intervalu I takto: položíme $\lambda_d(I) = 0$, pokud $I = \emptyset$ a pro $I := (a, b] \neq \emptyset$ definujeme

$$\lambda_d(I) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j).$$

Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme

$$\lambda_d^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(I_n) : \ I_n \in \mathcal{J}^d, \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Big\}.$$

Číslo $\lambda_d^*(A)$ se nazývá **vnější d-rozměrná Lebesgueova míra** množiny A.

7.1. Poznámky. Zřejmě pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ a každé $x \in \mathbb{R}^d$ je $\lambda_d^*(A + x) = \lambda_d^*(A)$, tedy vnější Lebesgueova míra definovaná na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ je **invariantní vůči posunutí**. Očekáváme, že pro každý interval $I \in \mathcal{J}^d$ platí $\lambda_d^*(I) = \lambda_d(I)$, tedy že λ_d^* je rozšířením objemu. Toto je pravda, ale tato rovnost není nikterak zřejmá (viz lemma 12.1). Odtud pak plyne z věty 3.4 (pro $d = 1$ a snadnou modifikací pro $d > 1$), že λ_d^* **není míra** na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Ukážeme však, že existuje dostatečně bohatá σ-algebra $\mathcal{L}^d$ (obsahující $\mathcal{B}^d$) taková, že $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^*_{d|\mathcal{L}^d})$ je prostor s úplnou mírou (viz věta 12.3 a poznámka 12.4(a)).

Postup vytváření vnější míry „zevně“ pomocí pokrývání užitý v definici λ_d^* můžeme studovat ve zcela abstraktním kontextu.

Kapitola 8

Generování vnější míry

8.1. Věta. *Nechť X je množina, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$, a nechť funkce $\tau : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ splňuje $\tau(\emptyset) = 0$. Pro $A \subset X$ definujeme*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n) : \; T_n \in \mathcal{T}, \; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right\}.$$

Potom množinová funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ má tyto vlastnosti:

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

(b) *pro $A \subset B$ platí $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$;*

(c) *pro posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin z X platí $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.*

Důkaz. Vlastnosti (a) a (b) plynou bezprostředně z definice. Nechť $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, a $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. K dokončení důkazu stačí nerovnost z (c) ověřit pro $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují množiny $T_{(n,\,j)} \in \mathcal{T}$, $(n,\, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, takové, že

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{(n,\,j)} \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \tau(T_{(n,\,j)}) \le \mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

[V tomto místě důkazu se obvykle říkává: jelikož

$$A \subset \bigcup_{n,\,j=1}^{\infty} T_{(n,\,j)} \quad \text{a} \quad \sum_{n,\,j=1}^{\infty} \tau(T_{(n,\,j)}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

platí $\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Protože μ^* je formálně vzato definována pomocí *jedné* pokrývací posloupnosti a nikoli pomocí „dvojných posloupností“ a „dvojné sumy“ jsme zatím nezavedli, dejme zde přednost pedantskému odůvodnění.]

Nechť φ je prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Tvrdíme, že $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{\varphi(k)}$. Je-li totiž $x \in A$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{(n,\,j)}$. Tudíž existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in T_{(n,\,j)}$. Pro $k := \varphi^{-1}\big((n,\,j)\big)$ je pak $x \in T_{\varphi(k)}$.

Dokážeme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau\big(T_{\varphi(k)}\big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tau\big(T_{(n,\,j)}\big).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \le m$ je

$$\varphi(k) \in Q := \{(r,\,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \ r \le p,\ s \le p\}.$$

Čísla $\tau(T_{(n,\,j)})$ jsou nezáporná a pro každé $(r,\,s) \in Q$ existuje nejvýše jedno $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\varphi(k) = (r,\,s)$. Proto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \tau\big(T_{\varphi(k)}\big) &\le \sum_{n=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \tau\big(T_{(n,\,j)}\big) \le \sum_{n=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty} \tau\big(T_{(n,\,j)}\big)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \tau\big(T_{(n,\,j)}\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(A_n) + \varepsilon\cdot 2^{-n}\Big).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau\big(T_{\varphi(k)}\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

a

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \qquad \square$$

Kapitola 9

Carathéodoryova věta pro vnější míru

Nechť $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je množinová funkce s vlastnostmi (a), (b), (c) z věty 8.1. Potom se μ^* nazývá **vnější míra** (na X). Vlastnost (c) se nazývá **σ-subaditivita**.

9.1. Poznámka. Vnější míra μ^* z věty 8.1 se nazývá **vnější míra generovaná** $(\mathcal{T}, \tau)$. V uvažované obecnosti nelze očekávat, že μ^* je rozšířením τ, tj. že pro každou množinu $A \in \mathcal{T}$ platí $\mu^*(A) = \tau(A)$; viz příklad 9.2(a).

Ani v případě, že $(X, \mathcal{T}, \tau)$ je prostor s mírou, nemusí být vnější míra μ^* generovaná $(\mathcal{T}, \tau)$ míra tj. σ-aditivní, dokonce obecně μ^* není aditivní; viz příklad 9.2(b).

9.2. Příklady.

(a) Nechť $X := \mathbb{N}$, $\mathcal{T}$ nechť je systém sestávající z konečných množin a z doplňků konečných množin a nechť $\tau(A) = 0$, pokud $A \subset \mathbb{N}$ je konečná, $\tau(A) = 1$, pokud A má konečný doplněk. Protože jednoprvkové množiny pokrývají $\mathbb{N}$, pro vnější míru μ^* generovanou $(\mathcal{T}, \tau)$ platí $\mu^*(\mathbb{N}) = 0 < 1 = \tau(\mathbb{N})$.

(b) Nechť $X := \{0, 1\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$, $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(X) = 1$. Potom $(X, \mathcal{T}, \tau)$ je prostor s mírou a pro vnější míru μ^* generovanou $(\mathcal{T}, \tau)$ platí $\mu^*(\{0\}) = 1 = \mu^*(\{1\})$ a $\mu^*\big(\{0\} \cup \{1\}\big) = 1$, tedy μ^* není aditivní.

(c) Nechť (X, ρ) je metrický prostor a pro $A \subset X$ nechť $\operatorname{diam} A$ je **průměr množiny** A (tedy $\operatorname{diam} \emptyset = 0$ a pro $A \neq \emptyset$ je $\operatorname{diam} A := \sup\{\, \rho(x, y) : \ x, y \in A\}$).

Nechť $p \geq 0$, $\delta > 0$, nechť $\mathcal{T}$ je systém všech množin T, pro něž $\operatorname{diam} T \leq \delta$, a $\tau(T) := (\operatorname{diam} T)^p$, $T \in \mathcal{T}$. Označme $H_{p,\delta}$ vnější míru generovanou $(\mathcal{T}, \tau)$. Pro $0 < \delta < \eta$ a $A \subset X$ je $H_{p,\eta}(A) \leq H_{p,\delta}(A)$. Množinová funkce $H_p : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definovaná pro $A \subset X$ rovností

$$H_p(A) := \lim_{\delta \to 0+} H_{p,\delta}(A)$$

je vnější míra. Nazývá se p-**rozměrná (vnější) Hausdorffova míra** v $\mathbb{R}^d$. (Poznamenejme, že se někdy uvažuje místo funkce τ její násobek zvolený tak, aby $H_d = \lambda_d^*$; dokázat tuto nesamozřejmou rovnost není snadné.)

Nechť μ^* je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá μ^*-**měřitelná**, jestliže pro každou množinu $E \subset X$ platí

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{9.1}$$

(Obrazně nematematicky vyjádřeno: μ^*-měřitelná množina je nůž, který rozřízne *každou* „testovací“ množinu E aditivně.)

Systém všech μ^*-měřitelných množin označíme $\mathcal{A}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a že $(X, \mathcal{A}, \mu^*_{|\mathcal{A}})$ je prostor s mírou.

9.3. Poznámky.

(a) Nechť vnější míra μ^* je generovaná $(\mathcal{T}, \tau)$. Může se stát, že některé množiny z $\mathcal{T}$ nejsou μ^*-měřitelné. Je-li např. $X := \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ a $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(X) = 2$ a $\tau(A) = 1$, pokud $A \neq X$ je neprázdná, potom $\mu^* = \tau$ a snadno se ověří, že systém μ^*-měřitelných množin je roven $\{\emptyset, X\}$. (Např. pro $A := \{1\}$ a $E := \{1, 2\}$ rovnost (9.1) neplatí, totéž pro $A := \{1, 2\}$ a $E = \{1\}$ atd.) Z tohoto příkladu je také vidět, že pro vnější míru μ^* není μ^*-měřitelnost množiny A důsledkem podmínky

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c).$$

Např. pro $A := \{1\}$ rovnost platí (obě strany jsou rovny 2) a A přitom není μ^*-měřitelná.

(b) Je-li $A \subset X$, $E \subset X$, pak subaditivita dává $\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$. Tudíž množina A je měřitelná, právě když pro každou množinu $E \subset X$, pro niž $\mu^*(E) < \infty$, platí

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

9.4. Věta. *Nechť μ^* je vnější míra na X a $\mathcal{A}$ je systém všech μ^*-měřitelných množin. Potom $(X, \mathcal{A}, \mu^*_{|\mathcal{A}})$ je úplný prostor s mírou.*

Důkaz. Budeme postupovat v několika krocích.

1. Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{A}$ a $A \in \mathcal{A}$ implikuje $A^c \in \mathcal{A}$ (plyne ze symetrie podmínky (9.1) vzhledem k A a A^c).

2. *Systém $\mathcal{A}$ je uzavřený vzhledem ke sjednocení dvou (a tedy konečně mnoha) množin:* Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a $E \subset X$. Budeme užívat tuto množinovou rovnost:

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B).$$

Z definice μ^*-měřitelnosti množiny A („testovací“ množina je E), μ^*-měřitelnosti množiny B („testovací“ množiny jsou $E \cap A$ a $E \cap A^c$) a ze subaditivity μ^* dostáváme

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*\big((E \cap A) \cap B\big) + \mu^*\big((E \cap A) \cap B^c\big) \\ &\quad + \mu^*\big((E \cap A^c) \cap B\big) + \ \mu^*\big((E \cap A^c) \cap B^c\big) \\ &\geq \mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big). \end{aligned}$$

Vidíme, že $A \cup B \in \mathcal{A}$.

3. *Vnější míra je na $\mathcal{A}$ aditivní:* Nechť $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$. Potom („testovací“ množina je $A \cup B$)

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big((A \cup B) \cap A^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

4. *Systém $\mathcal{A}$ je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením:* Podle cvičení 2.2 stačí ověřit, že $\mathcal{A}$ je uzavřený vzhledem ke spočetným *disjunktním* sjednocením. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$, $B_0 := \emptyset$, $B_j := \bigcup_{n=1}^j A_n$, $j \in \mathbb{N}$, $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Nechť $E \subset X$. Potom („testovací“ množina je $E \cap B_j$) pro $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_j) &= \mu^*\big((E \cap B_j) \cap A_j\big) + \mu^*\big((E \cap B_j) \cap A_j^c\big) \\ &= \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B_{j-1}). \end{aligned}$$

Indukcí odtud plyne, že

$$\mu^*(E \cap B_j) = \sum_{n=1}^j \mu^*(E \cap A_n).$$

Protože $B_j \in \mathcal{A}$, platí pro každé $j \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap B_j^c) \geq \sum_{n=1}^j \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c),$$

tedy pro $j \to \infty$ dostáváme (užijeme σ-subaditivitu a subaditivitu)

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geq \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (E \cap A_n)\Big) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že množina A je μ^*-měřitelná a

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c).$$

5. *Množinová funkce μ^* je na $\mathcal{A}$ σ-aditivní:* V poslední rovnosti stačí zvolit $E := A$.

6. *Jestliže $\mu^*(A) = 0$, potom $A \in \mathcal{A}$* (odtud plyne, že $(X, \mathcal{A}, \mu^*_{|\mathcal{A}})$ je úplný prostor s mírou): Je-li $\mu^*(A) = 0$ a $E \subset X$, pak

   $$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

   tudíž $A \in \mathcal{A}$. □

9.5. Lemma. *Nechť μ^* je vnější míra generovaná $(\mathcal{T}, \tau)$. Nechť $A \subset X$ a nechť pro každou množinu $T \in \mathcal{T}$ platí $T \cap A \in \mathcal{T}$, $T \cap A^c \in \mathcal{T}$ a $\tau(T) = \tau(T \cap A) + \tau(T \cap A^c)$. Potom množina A je μ^*-měřitelná.*

Důkaz. Nechť $E \subset X$ a nechť $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin z $\mathcal{T}$ taková, že $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Potom $E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(T_n \cap A)$, $E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(T_n \cap A^c)$, tudíž

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n \cap A^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n).$$

Odtud plyne, že $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$, tedy množina A je μ^*-měřitelná. □

Z věty 9.4 a lemmatu 9.5 snadno plyne věta o rozšíření pramíry na míru. Nejprve dvě definice.
Nechť X je množina a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Říkáme, že $\mathcal{R}$ je **algebra** (na X), jestliže platí:

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$;

(b) pro každou množinu $R \in \mathcal{R}$ je $R^c \in \mathcal{R}$;

(c) jsou-li $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$, potom $\bigcup_{j=1}^{n} R_j \in \mathcal{R}$.

Je-li $\mathcal{R}$ algebra na X, pak funkce $\rho : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ se nazývá **pramíra**, jestliže

(a) $\rho(\emptyset) = 0$;

(b) je-li $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{R}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{R}$, potom $\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R_n)$.

9.6. Věta. *Nechť $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ je algebra, ρ je pramíra na $\mathcal{R}$ a $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{R})$. Potom existuje míra μ na $\mathcal{A}$ taková, že $\mu_{|\mathcal{R}} = \rho$. Jestliže existuje posloupnost $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{R}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ a $\rho(R_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a ν je míra na $\mathcal{A}$, pro niž $\nu_{|\mathcal{R}} = \rho$, potom $\nu = \mu$.*

Důkaz. Nechť ρ^* je vnější míra generovaná $(\mathcal{R}, \rho)$. Protože $\mathcal{R}$ je algebra a ρ je konečně aditivní, plyne z lemmatu 9.5, že každá množina z $\mathcal{R}$ je ρ^*-měřitelná.

Je-li $R \in \mathcal{R}$ a $R \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, $R_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existují podle cvičení 2.2 po dvou disjunktní množiny $S_n \in \mathcal{R}$ takové, že $S_n \subset R_n$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Jelikož ρ je pramíra, je $\rho(R) \leq \rho\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(R \cap S_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R \cap S_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R \cap R_n)$, tedy $\rho(R) \leq \rho^*(R)$. Obrácená nerovnost je zřejmá, stačí zvolit $R_1 = R$ a $R_n = \emptyset$ pro všechna $n \geq 2$.

Víme, že systém všech ρ^*-měřitelných množin tvoří σ-algebru obsahující $\mathcal{R}$, tedy také obsahující $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$. Nyní stačí položit $\mu := \rho^*_{|\mathcal{A}}$. Jednoznačnost plyne z věty 4.3. $\square$

Kapitola 10

Lebesgueova míra a Lebesgueova-Stieltjesova míra v $\mathbb{R}$

10.1. Lemma. *Nechť $n \in \{1, \dots, d\}$, $c \in \mathbb{R}$ a $P_n(c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_n > c\}$. Potom $P_n(c)$ je λ_d^*-měřitelná množina.*

Důkaz. Vnější míra λ_d^* je generovaná $(\mathcal{J}^d, \lambda_d)$. Je-li $I \subset P_n(c)$ nebo $I \cap P_n(c) = \emptyset$, je rovnost $\lambda_d(I) = \lambda_d\big(I \cap P_n(c)\big) + \lambda_d\big(I \backslash P_n(c)\big)$ zřejmá. V ostatních případech je $I := (a, b\,]$ a $a_n < c < b_n$. Nechť $J := \{1, \dots, d\} \backslash \{n\}$, $x_j := a_j$ pro $j \in J$, $x_n := c$, $y_j := a_j$ pro $j \in J$ a $y_n := c$. Potom $I \cap P_n(c) = (x, b\,]$, $I \backslash P_n(c) = (a, y\,]$, tudíž

$$\lambda_d\big(I \cap P_n(c)\big) + \lambda_d\big(I \backslash P_n(c)\big) = (b_n - c) \cdot \prod_{j \in J} (b_j - a_j) + (c - a_n) \cdot \prod_{j \in J} (b_j - a_j) = \lambda_d(I).$$

Tvrzení plyne z lemmatu 9.5. □

10.2. Věta. *Každá borelovská množina v $\mathbb{R}^d$ je λ_d^*-měřitelná.*

Důkaz. Protože systém všech λ_d^*-měřitelných množin je σ-algebra, stačí dokázat, že každá otevřená množina je λ_d^*-měřitelná. Je-li $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, pak existuje posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ intervalů z $\mathcal{J}^d$ taková, že $M = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Stačí tedy ověřit, že každý polouzavřený interval je λ_d^*-měřitelný. Nechť $I := (a, b\,] \in \mathcal{J}^d$. Potom

$$I = \bigcap_{n=1}^{d} \big(P_n(a_n) \backslash P_n(b_n)\big).$$

Podle lemmatu 10.1 je I λ_d^*-měřitelná množina. □

10.3. Lemma. *Nechť $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Pro $I := (a, b\,]$ definujeme $\mu_G(I) := G(b) - G(a)$, pokud $a < b$, $\mu_G(I) = 0$, pokud $a \geq b$. Nechť μ_G^* je vnější míra generovaná $(\mathcal{J}^1, \mu_G)$. Potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina (c, ∞) μ_G^*-měřitelná.*

Důkaz. Pro $A := (c, \infty)$ a $(\mathcal{T}, \tau) := (\mathcal{J}^1, \mu_G)$ jsou splněny předpoklady lemmatu 9.5. $\square$

10.4. Věta. *Každá borelovská podmnožina $\mathbb{R}$ je μ_G^*-měřitelná.*

Důkaz. Plyne z tvrzení 10.3, neboť pro $a < b$ je $(a, b] = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$ a zřejmě je $\sigma(\mathcal{J}^1) = \mathcal{B}^1$, neboť každou otevřenou množina v $\mathbb{R}$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení intervalů z $\mathcal{J}^1$. $\square$

10.5. Lemma. *Nechť G, μ_G a μ_G^* mají stejný význam jako v lemmatu 10.3. Je-li $I \in \mathcal{J}^1$, potom $\mu_G^*(I) = \mu_G(I)$.*

Důkaz. Nechť $I \in \mathcal{J}^1$. Definujme $I_1 := I$, $I_n := \emptyset$ pro $n \geq 2$. Z definice $\mu_G^*(I)$ plyne, že $\mu_G^*(I) \leq \mu_G(I)$. K důkazu obrácené nerovnosti stačí dokázat toto tvrzení:

Je-li $I \in \mathcal{J}^1$ a $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost intervalů z $\mathcal{J}^1$ taková, že $I \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, potom

$$\mu_G(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G(I_n)\,. \tag{10.1}$$

Nechť $J, J' \in \mathcal{J}^1$, $J' \subset J$. Protože G je neklesající, je $\mu_G(J') \leq \mu_G(J)$. Je-li $I = \emptyset$, je nerovnost (10.1) zřejmá. Nechť $I := (a, b]$, kde $a < b$. Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme $P(c) := (c, \infty)$,

$$M := \Big\{c \in [a, b] : \ \mu_G\big((c, b]\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G(I_n \cap P(c))\Big\}$$

a $m := \inf M$. Zřejmě $M \neq \emptyset$, neboť $b \in M$. Tedy $m \in [a, b]$. Protože $P(c) \subset P(m)$ pro každé $c \in M$ a G je zprava spojitá v bodě m, platí

$$\begin{aligned}
\mu_G\big((m, b]\big) &= G(b) - G(m) = G(b) - G(m+) \\
&= \sup\Big\{G(b) - G(c) : c \in M\Big\} = \sup\Big\{\mu_G\big((c, b]\big) : c \in M\Big\} \\
&\leq \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_G\big(I_n \cap (P(c))\big) : c \in M\Big\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G\big(I_n \cap (P(m))\big).
\end{aligned}$$

Vidíme, že $m \in M$. Dokázat (10.1) znamená ověřit, že $m = a$. Předpokládejme, že $m > a$; odvodíme spor. Existuje interval $I_j := (c_j, d_j]$ obsahující bod m. Položme $y := \max\{c_j, a\}$, takže $y < m$ a $(y, d_j] = (y, m] \cup (m, d_j]$, takže

$$\mu_G\big(I_j \cap P(y)\big) = G(d_j) - G(y) = G(d_j) - G(m) + G(m) - G(y) = \mu_G\big(I_j \cap P(m)\big) + G(m) - G(y)\,,$$

tedy (užije se, že $m \in M$) platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_G\big(I_n \cap P(y)\big) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G\big(I_n \cap P(m)\big) + G(m) - G(y) \\ &\geq \mu_G\big((m,\, b\,]\big) + G(m) - G(y) = G(b) - G(m) + G(m) - G(y) \\ &= G(b) - G(y) = \mu_G\big((y,\, b\,]\big).\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $y \in M$, tedy $y \geq m$, což je spor, neboť $y < m$. □

10.6. Lemma. *Nechť μ^* je vnější míra generovaná $(\mathcal{T},\, \tau)$ (viz věta 8.1), $\mathcal{A}$ je σ-algebra μ^*-měřitelných množin a $\mu := \mu^*_{|\mathcal{A}}$. Nechť $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, $\mu = \tau$ na $\mathcal{T}$ a nechť existují $X_m \in \sigma(\mathcal{T})$ takové, že $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ a $\mu(X_m) < \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Jestliže $A \in \mathcal{A}$, potom existují množiny $A', A'' \in \sigma(\mathcal{T})$ takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \backslash A') = 0$.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{A}$. Nejprve předpokládejme, že $\mu(A) < \infty$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Existuje posloupnost $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{T}$ taková, že $A \subset A''_n := \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(T_j) \leq \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Platí tedy

$$\mu(A''_n \backslash A) = \mu(A''_n) - \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T_j) - \mu(A) \leq \frac{1}{n}.$$

Pro $A'' := \bigcap_{n=1}^{\infty} A''_n$ platí $A'' \in \sigma(\mathcal{T})$, $A \subset A''$ a $\mu(A'' \backslash A) = 0$, neboť $\mu(A'' \backslash A) \leq \mu(A''_n \backslash A) \leq$ $\leq \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Nyní opustíme dodatečný předpoklad. Můžeme předpokládat, že množiny X_m jsou po dvou disjunktní (cvičení 2.2). Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $A_m := A \cap X_m$, $m \in \mathbb{N}$. Potom $A_m \in \mathcal{A}$ a podle první části důkazu existuje množina $A''_m \in \sigma(\mathcal{T})$ taková, že $A_m \subset A''_m$ a $\mu(A''_m \backslash A_m) = 0$. Můžeme předpokládat, že $A''_m \subset X_m$ (jinak bychom uvažovali průnik s X_m). Jestliže $A'' := \bigcup_{m=1}^{\infty} A''_m$, pak $A'' \in \sigma(\mathcal{T})$, $A \subset A''$ a $\mu(A'' \backslash A) = 0$, neboť $A'' \backslash A = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A''_m \backslash A_m)$.

Je-li $B := A^c$, pak podle druhé části důkazu existuje $B'' \in \sigma(\mathcal{T})$ taková, že $A^c \subset B''$ a $\mu(B'' \backslash B) = 0$. Tudíž pro $A' := (B'')^c$ je $A' \in \sigma(\mathcal{T})$ a

$$\mu(A \backslash A') = \mu\big((A')^c \backslash A^c\big) = \mu(B'' \backslash B) = 0.$$

Dostáváme

$$\mu(A'' \backslash A') = \mu(A'' \backslash A) + \mu(A \backslash A') = 0.$$

□

10.7. Věta (Lebesgueova-Stieltjesova míra)**.** Nechť $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Potom na $\mathbb{R}$ existuje právě jedna Radonova míra μ_G taková, že

$$\mu_G\big((a,\, b\,]\big) = G(b) - G(a),\ a,\, b \in \mathbb{R},\ a < b. \tag{10.2}$$

Důkaz. Pro $I := (a,\, b\,] \in \mathcal{J}^1$ definujeme $\mu_G(I) = G(b) - G(a)$, pokud $a < b$, $\mu_G(I) = 0$ pro $a \geq b$. Označme μ_G^* vnější míru generovanou $(\mathcal{J}^1,\, \mu_G)$ a $\mathcal{S}_G$ σ-algebru μ_G^*-měřitelných množin. Víme (věta 10.4), že platí $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{S}_G$ a $\mu_G^*\big((a,\, b\,]\big) = \mu_G\big((a,\, b\,]\big) = G(b) - G(a)$ (lemma 10.5). Bez nebezpečí kolize označení definujeme $\mu_G := \mu^*_{G|\mathcal{S}_G}$. Podle věty 9.4 je $(\mathbb{R},\, \mathcal{S}_G,\, \mu_G)$ úplný prostor s mírou. Míra μ_G je zřejmě lokálně konečná, tedy podle věty 6.2 je μ_G Radonova míra, neboť je zúplněním míry $\mu_{G|\mathcal{B}^1}$ podle lemmatu 10.6 (za $(\mathcal{T},\, \tau)$ volíme $(\mathcal{J}^1, \mu_G)$, připomeneme, že $\sigma(\mathcal{J}^1) = \mathcal{B}^1$ a užijeme větu 10.4 a lemma 10.5).

Zbývá dokázat jednoznačnost. Protože systém $\mathcal{J}^1$ je uzavřený vzhledem k průniku, $\sigma(\mathcal{J}^1) = \mathcal{B}^1$ a $\mu_G\big((-n,\, n\,]\big) < \infty$ pro $n \in \mathbb{N}$, je podle věty 4.3 míra μ_G jednoznačně určená na $\mathcal{B}^1$. Podle poznámky 6.3 je μ_G jediná Radonova míra splňující rovnost (10.2) $\square$

10.8. Poznámky.

(a) S ohledem na příklad 3.3 zdůrazňujeme, že $\mathcal{S}_G$ je zúplnění $\mathcal{B}^1$ vzhledem k $\mu_0 := \mu_{G|\mathcal{B}^1}$ a μ_G je (jednoznačně určené) rozšíření μ_0 na $\mathcal{S}_G = \big\{A \cup N : A \in \mathcal{B}^1,\ N \in \mathcal{N}(\mu_0)\big\}$; viz poznámka 5.3.

(b) Pro $G : x \mapsto x,\ x \in \mathbb{R}$, věta 10.7 dává existenci a jednoznačnost Lebesgueovy míry λ_1 v $\mathbb{R}$ (viz příklad 3.2).

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\big(x - \frac{1}{n},\, x\,\big]$, tedy $\lambda_1\big(\{x\}\big) = 0$, neboť $\lambda_1\big(\{x\}\big) \leq \frac{1}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že

$$\lambda_1\big((a,\, b)\big) = \lambda_1\big((a,\, b\,]\big) = \lambda_1\big([a,\, b)\big) = \lambda_1\big([a,\, b\,]\big) = b - a, \quad a \leq b\,.$$

Zřejmě pro každou spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ platí $\lambda_1(S) = 0$.

Pro neklesající zprava spojitou funkci G je $\mu_G\big(\big(x - \frac{1}{n},\, x\,\big]\big) = G(x) - G\big(x - \frac{1}{n}\big)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tedy $\mu_G\big(\{x\}\big) = G(x) - G(x-)$. Platí tedy $\mu_G\big((a,\, b)\big) = G(b-) - G(a)$, $\mu_G\big([a,\, b)\big) = G(b-) - G(a-)$, $\mu_G\big([a,\, b\,]\big) = G(b) - G(a-)$.

(d) Na $\mathbb{R}$ existují nespočetné kompaktní množiny, které mají míru 0. Uvedeme nepominutelný příklad, tzv. *Cantorovo diskontinuum.*

Je známo, že každé číslo $a \in [0,\, 1\,]$ lze vyjádřit v trojkové soustavě ve tvaru

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots$$

(zápis: $a = 0, a_1 a_2 \ldots$), kde „cifry“ a_n jsou čísla $0, 1$, nebo 2. Je-li $a = 0, a_1 a_2 \ldots$, $b = 0, b_1 b_2 \ldots$ a $n \in \mathbb{N}$ je nejmenší číslo, pro které $a_n \neq b_n$, potom v případě $b_n > a_n$

je $b > a$, pokud nenastal následující výjimečný případ: $a_n < 2,\ a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 2$ a $b_n = a_n + 1,\ b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = 0$. Pak zřejmě $a = b$.

Nechť C je množina všech čísel z intervalu $[0,\,1]$, která lze alespoň jedním způsobem vyjádřit ve tvaru $a = 0,a_1a_2\ldots$, přičemž $a_n \neq 1$pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Snadno si rozmyslíme, že C vznikne postupným odstraněním prostředních třetin (tzv. *styčných intervalů* Cantorova diskontinua): nejprve se odstraní interval $(1/3, 2/3)$, v tomto intervalu totiž leží právě všechna čísla, která mají nutně na prvním místě cifru 1. V druhém kroku se ze zbývajících intervalů $[0, 1/3\,]$ a $[2/3, 1\,]$ odstraní prostřední třetiny, tj. intervaly $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. V n-tém kroku se odstraní 2^{n-1} intervalů délky 3^{-n}, atd. Označíme-li $G := [0,\,1\,]\backslash C$, je G otevřená množina sestávající z otevřených intervalů, které jsou po dvou disjunktní. Intervalů délky 3^{-n} je 2^{n-1}, proto $\lambda_1(G) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}\cdot 3^{-n}) = 1$. Pro kompaktní množinu C je tudíž $\lambda_1(C) = 0$. Nechť S je množina těch $x = 0,a_1a_2\ldots$, pro něž všechna a_n s výjimkou konečného počtu jsou rovna nule. Pak S je spočetná a zobrazení $f : C\backslash S \to [0,\,1\,]$, které bodu $2b_1/3 + 2b_2/3^2 + \ldots$ přiřadí bod $b_1/2 + b_2/2^2\ldots$ (b_n je rovno 0 nebo 1) je prosté zobrazení $C\backslash S$ na $[0,\,1\,]$. Proto je množina C nespočetná.

(e) Dokážeme, že existuje spojitá neklesající funkce $\varphi : [0,\,1\,] \to \mathbb{R}$ taková, že φ je konstantní na každém styčném intervalu Cantorova diskontinua C a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Pro každé x z omezeného styčného intervalu Cantorova diskontinua, jehož koncový bod má rozvoj tvaru $2a_1/3 + \cdots + 2a_n/3^n$, definujeme $\varphi(x) := a_1/2 + \cdots + a_n/2^n$ (a_j je 0 nebo 1). Dále položíme $\varphi(0) := 0$ a pro $x \in (0,\,1\,]$ definujeme

$$\varphi(x) := \sup\{\varphi(y) :\ y \in [0,\,1\,]\backslash C,\ y \leq x\}.$$

Potom je funkce φ neklesající. Jelikož dále pro každé $m, n \in \mathbb{N},\ m < 2^n$, platí $m/2^n \in \varphi\big([0,\,1\,]\backslash C\big)$, je funkce φ spojitá a $\varphi(1) = 1$.

Položme $\psi(x) := \big(x + \varphi(x)\big)/2,\ x \in [0,\,1\,]$. Potom ψ zobrazuje spojitě a prostě $[0,\,1\,]$ na $[0,\,1\,]$, ψ^{-1} je spojitá a $\psi\big([0,\,1\,]\backslash C\big)$ je otevřená množina, jejíž míra je rovna $1/2$. Proto $\lambda_1\big(\psi(C)\big) = 1/2$. Z věty 3.4 plyne, že existuje $A \subset \psi(C)$ taková, že $A \notin \mathcal{L}^1$. Definujme $M := \psi^{-1}(A)$. Potom $M \subset C$, tudíž $M \in \mathcal{L}^1$. Z níže popsané úvahy plyne, že $M \notin \mathcal{B}^1$.

Označme $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}^1 :\ \ \psi(B) \in \mathcal{B}^1\}$. Protože ψ^{-1} je spojité zobrazení, je vzor každé otevřené podmnožiny intervalu $[0,\,1\,]$ při ψ^{-1} otevřená množina, tedy každá otevřená množina padne do $\mathcal{A}$. Protože ψ je prosté, je obraz sjednocení spočetně mnoha množin sjednocením obrazů a obraz doplňku množiny je roven doplňku obrazu. Je tedy $\mathcal{A}$ σ-algebra a odtud plyne, že $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}$.

(f) Nechť $a < b$. Existuje kompaktní množina $K \subset [a, b\,]$ taková, že K má prázdný vnitřek a $\lambda_1(K) > 0$. Existují tedy řídké množiny kladné Lebesgueovy míry. Nechť $\mathbb{Q} \cap [a, b\,] = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Pro $\delta \in (0, b-a)$ definujme interval

$$I_n := \big(r_n - \delta/2^{n+1},\ r_n + \delta/2^{n+1}\big),\ n \in \mathbb{N},$$

a definujme $K_\delta := [a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Potom K_δ je kompaktní a

$$\lambda_1(K_\delta) = b-a-\lambda_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \geq b-a-\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\delta}{2^n}\Big) = b-a-\delta > 0.$$

Jelikož $K_\delta \cap (\mathbb{Q}\cap[a,b]) = \emptyset$, vnitřek množiny K_δ je prázdný.

Nechť $k\in\mathbb{N},\ 1/k < b-a$. Definujme ještě $L := \bigcup_{n=k}^{\infty} K_{1/n}$. Snadno nahlédneme, že platí $\lambda_1(L) \geq \lambda_1(K_{1/n}) \geq b-a-1/n$, kdykoli $n\in\mathbb{N},\ n\geq k$, proto $\lambda_1(L) = b-a$. Jestliže $M := \bigcup\{L+m\cdot(b-a):\ m\in\mathbb{Z}\}$, $N := \mathbb{R}\setminus M$, pak M je množina 1. kategorie (tj. spočetné sjednocení řídkých množin) a $\lambda_1(N) = 0$. Tedy každá množina $A\subset\mathbb{R}$ je sjednocením množiny 1. kategorie a množiny míry 0, totiž $A = (A\cap M)\cup(A\cap N)$.

(g) Množina kladné míry tedy nemusí obsahovat (nedegenerovaný) interval. Platí toto tvrzení: *Je-li* $A\in\mathcal{L}^1,\ \lambda_1(A) > 0$, *potom existuje číslo* $\delta > 0$ *takové, že*

$$(-\delta,\,\delta)\subset A-A := \{x-y:\ x,\,y\in A\}\,.$$

To lze dokázat např. takto: S odvoláním na větu 6.1 lze předpokládat, že A je kompaktní a podle téže věty existuje otevřená množina G taková, že je $A\subset G$ a přitom $\lambda_1(G) < < 2\lambda_1(A)$. Protože A je kompaktní množina disjunktní s uzavřenou množinou $\mathbb{R}\setminus G$, existuje $\delta > 0$ takové, že $A+x\subset G$ pro každé $x\in(-\delta,\,\delta)$. Tvrdíme, že $(-\delta,\,\delta)\subset\subset A-A$. Zvolme $v\in(-\delta,\,\delta)$. Potom $A\cup(A+v)\subset G$. Kdyby $A\cap(A+v) = \emptyset$, pak by platilo

$$2\lambda_1(A) = \lambda_1(A)+\lambda_1(A+v) = \lambda_1\big(A\cup(A+v)\big) \leq \lambda_1(G),$$

což je ve sporu s nerovností $\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A)$. Vidíme, že $A\cap(A+v)\neq\emptyset$, tj. existují body $x,\,y\in A$ takové, že $x = y+v$, neboli $v = x-y\in A-A$.

Kapitola 11

Pravděpodobnostní míry a distribuční funkce

Říkáme, že $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **distribuční funkce**, jestliže

(a) F je neklesající;

(b) F je zprava spojitá;

(c) $F(-\infty+) = 0$ a $F(\infty-) = 1$.

Označíme $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ **množinu pravděpodobnostních měr** na $\mathcal{B}^1$.

11.1. Věta.

(a) *Jestliže* $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ *a*
$$F(x) := \mu\big((-\infty, x\,]\big),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{11.1}$$
potom F *je distribuční funkce.*

(b) *Jestliže* F *je distribuční funkce, potom existuje právě jedna míra* $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ *taková, že platí* (11.1).

Důkaz. Plyne z věty 3.7 a z věty 10.7. □

Kapitola 12

Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^d$

12.1. Lemma. *Pro $I \in \mathcal{J}^d$ je $\lambda_d^*(I) = \lambda_d(I)$.*

Důkaz. Nechť $I \in \mathcal{J}^d$. Nerovnost $\lambda_d^*(I) \leq \lambda_d(I)$ je zřejmá z definice vnější Lebesgueovy míry. K důkazu obrácené nerovnosti stačí ověřit nerovnost

$$\lambda_d(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(I_n), \qquad I_n \in \mathcal{J}^d, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{N(d)}$$

Důkaz provedeme indukcí. Pro $d = 1$ je $N(1)$ nerovnost (10.1) pro funkci $G : x \mapsto x,\ x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $d \geq 1$ a že platí $N(d)$. Nechť $I,\ I_n \in \mathcal{J}^{d+1},\ I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Nerovnost $N(d+1)$ zřejmě platí, pokud $I = \emptyset$. Nechť $I := (a,\, b\,] \neq \emptyset,\ I_n := \big(a^{(n)},\, b^{(n)}\,\big] \neq \emptyset,\ n \in \mathbb{N}$, a pro $c \in \mathbb{R}$ nechť $P(c) := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} :\ c < x_{d+1}\}$. Označme $v := \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j)$, takže $\lambda_{d+1}(I) = v \cdot (b_{d+1} - a_{d+1})$.

Nechť $\varepsilon > 0$. [Faktor $1 + \varepsilon$ v následující definici představuje „malou rezervu“, která v důkazu umožní přejít od nekonečného pokrytí ke konečnému.]

Definujme

$$M := \Big\{ c \in [a_{d+1},\, b_{d+1}\,] :\ v(b_{d+1} - c) \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(c)\big) \Big\}.$$

Zřejmě $b_{d+1} \in M$, tedy $m := \inf M \in [a_{d+1},\, b_{d+1}\,]$. Platí

$$\begin{aligned} v(b_{d+1} - m) &= \sup \big\{ v(b_{d+1} - c) :\ c \in M \big\} \\ &\leq (1+\varepsilon) \cdot \sup \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(c)\big) :\ c \in M \Big\} \\ &\leq (1+\varepsilon) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(m)\big), \end{aligned}$$

tudíž $m \in M$. Dokážeme, že $m = a_{d+1}$, neboli

$$\lambda_{d+1}(I) \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}(I_n).$$

Protože pak tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, bude tím dokázána nerovnost $N(d+1)$. Předpokládejme, že $m > a_{d+1}$; odvodíme spor. Definujme

$$J := \big\{ x \in \mathbb{R}^d : \ (x_1, \dots, x_d, m) \in I \big\}, J_n := \big\{ x \in \mathbb{R}^d : \ (x_1, \dots, x_d, m) \in I_n \big\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Protože $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, je $J \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ a J, $J_n \in \mathcal{J}^d$. Z indukčního předpokladu $N(d)$ plyne, že

$$v = \lambda_d(J) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(J_n).$$

Jelikož $J \neq \emptyset$, je $v > 0$ a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$v \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{k} \lambda_d(J_n). \tag{12.1}$$

Pro $n \in \{1, \dots, k\}$ je buďto $J_n = \emptyset$ nebo $a_{d+1}^{(n)} < m \leq b_{d+1}^{(n)}$. Definujme (zde se užije toho, že jsme přešli od nekonečné posloupnosti ke konečné)

$$c := \max \big\{ \{a_{d+1}\} \cup \{a_{d+1}^{(n)} : \ n \in \{1, \dots, k\}, \ J_n \neq \emptyset\} \big\}.$$

Potom $c < m$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(c)\big) \geq \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(m)\big) + (m-c)\lambda_d(J_n). \tag{12.2}$$

Protože $m \in M$ a $P(m) \subset P(c)$, plyne z nerovností (12.1) a (12.2)

$$\begin{aligned}
v(b_{d+1} - c) &= v(b_{d+1} - m) + v(m - c) \\
&\leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(m)\big) + (1+\varepsilon)(m-c) \sum_{n=1}^{k} \lambda_d(J_n) \\
&\leq (1+\varepsilon) \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(m)\big) + (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{k} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(c)\big) \\
&\leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{d+1}\big(I_n \cap P(c)\big),
\end{aligned}$$

tedy $c \in M$, což je spor, neboť $c < \inf M$. $\square$

12.2. Lemma. *Nechť* $c \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ *a* $H_j(c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_j = c\}$. *Potom* $\lambda_d^*\big(H_j(c)\big) = 0$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ a

$$I_n := \big\{x \in \mathbb{R}^d;\ -2^{n-1} < x_k \le 2^{n-1},\ k \in \{1, \dots, d\} \backslash \{j\},\ c - \varepsilon \cdot 2^{-2n} < x_j \le c\big\}.$$

Potom
$I_n \in \mathcal{J}^d$, $\lambda_d(I_n) = 2^{d-1} \cdot 2^n \cdot \varepsilon \cdot 2^{-2n} = 2^{d-1} \cdot 2^{-n} \cdot \varepsilon$, $H_j(c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(I_n) = 2^{d-1}\varepsilon$. Odtud plyne, že $\lambda_d^*\big(H_j(c)\big) = 0$. $\square$

12.3. Věta (Lebesgueova míra)**.** *Na* $\mathbb{R}^d$ *existuje právě jedna Radonova míra* λ_d *taková, že* λ_d *přiřazuje každému intervalu z* $\mathcal{J}^d$ *jeho objem. Míra* λ_d *je invariantní vůči posunutí.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{L}^d$ je σ-algebra všech λ_d^*-měřitelných množin. Z věty 10.2 a z lemmatu 12.1 víme, že $\mathcal{B}^d \subset \mathcal{L}^d$ a $\lambda_d^*(I)$ je rovno objemu I pro každý interval $I \in \mathcal{J}^d$. Bez nebezpečí kolize označení definujeme $\lambda_d := \lambda^*_{d|\mathcal{L}^d}$. Podle věty 9.4 je $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda_d)$ úplný prostor s mírou. Míra λ_d je zřejmě lokálně konečná, tedy λ_d je Radonova míra podle věty 6.2, neboť je podle lemmatu 10.6 zúplněním míry $\lambda_{d|\mathcal{B}^d}$. (Za $(\mathcal{T}, \tau)$ volíme $(\mathcal{J}^d, \lambda_d)$, připomeneme, že $\sigma(\mathcal{J}^d) = \mathcal{B}^d$ a užijeme větu 10.2 a lemma 12.1.) Protože λ_d^* je invariantní vůči posunutí, platí totéž pro λ_d.

Zbývá dokázat jednoznačnost. Protože systém $\mathcal{J}^d$ je uzavřený vzhledem k průniku, $\sigma(\mathcal{J}^d) = \mathcal{B}^d$ a $\lambda_d\big((-n, n]^d\big) < \infty$ pro $n \in \mathbb{N}$, je podle věty 4.3 míra λ_d jednoznačně určená na $\mathcal{B}^d$. Podle poznámky 6.3 je λ_d jediná Radonova míra přiřazující každému intervalu z $\mathcal{J}^d$ jeho objem. $\square$

12.4. Poznámky.

(a) Prvky σ-algebry $\mathcal{L}^d$ se nazývají **lebesgueovsky měřitelné množiny** v $\mathbb{R}^d$. Systém $\mathcal{L}^d$, přestože zahrnuje velice komplikované množiny, má srozumitelnou strukturu; viz věta 6.1 charakterizující měřitelné množiny pomocí topologicky jednoduchých množin.

S ohledem na příklad 3.2 zdůrazněme, že $\mathcal{L}^d$ je zúplnění $\mathcal{B}^d$ vzhledem k míře $\nu := \lambda_{d|\mathcal{B}^d}$ a λ_d je (jednoznačně určené) rozšíření míry ν na $\mathcal{L}^d := \{A \cup N :\ A \in \mathcal{B}^d,\ N \in \mathcal{N}(\nu)\}$; viz poznámka 5.3. Míře ν se někdy říká **d-rozměrná Lebesgueova-Borelova míra**.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^d$. Z lemmatu 12.2 plyne, že pro každou množinu A, pro kterou platí $(a, b) \subset A \subset [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^d$, je $\lambda_d(A)$ rovno objemu intervalu $(a, b]$, tedy součinu délek jeho hran.

(c) Je-li $S \subset \mathbb{R}^d$ spočetná, pak zřejmě $\lambda_d(S) = 0$, neboť jednobodové množiny mají míru 0.

Kapitola 13

Invariantní míry na $\mathbb{R}^d$

Domluvme se, že číslo $x \in \mathbb{R}$ nazveme **dyadicky racionální**, když existují $p \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že $x = p/2^n$. Bod $x := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ nazveme dyadicky racionální, jestliže $x_1, \dots, x_d$ jsou dyadicky racionální čísla.

Systém všech intervalů $I := (a, b\,] \in \mathcal{J}^d$, pro něž a, b jsou dyadicky racionální body, označíme $\mathcal{I}^d$. Zřejmě je $\mathcal{I}^d$ spočetný systém uzavřený vzhledem k průniku a každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^d$ je sjednocením spočetného systému množin z $\mathcal{I}^d$. Odtud plyne, že $\mathcal{B}^d \subset \sigma(\mathcal{I}^d)$, a protože $\mathcal{I}^d \subset \mathcal{B}^d$, je $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}^d$ dyadicky racionální bod a $\delta > 0$ dyadicky racionální číslo, pak

$$J := \{x \in \mathbb{R}^d : \ a_j < x_j \le a_j + \delta\}$$

nazýváme **dyadickou polouzavřenou krychlí** o délce hrany δ. Víme, že $\lambda_d(J) = \delta^d$.

13.1. Věta (o jednoznačnosti invariantní míry)**.** *Nechť $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu)$ je prostor s mírou, která je invariantní vůči posunutí, a nechť $c := \mu\big([0, 1\,]^d\big) < \infty$. Potom na $\mathcal{B}^d$ platí $\mu = c \cdot \lambda_d$.*

Důkaz. Označme $\gamma := \mu\big((0, 1\,]^d\big)$. Zřejmě $0 \le \gamma < \infty$. Nechť $s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathcal{Q}_s$ je systém polouzavřených dyadických krychlí

$$Q(p) := \big\{x \in \mathbb{R}^d : \ (p_j - 1)/2^s < x_j \le p_j/2^s, \ j \in \{1, \dots, d\}\big\},$$

$p := (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$. Označíme-li $q := (1, \dots, 1)$, pak každá z krychlí $Q(p)$ je posunutím krychle $Q(q)$. Dále je interval $(0, 1\,]^d$ sjednocením po dvou disjunktních krychlí $Q(p)$ pro různá $p := (p_1, \dots, p_d)$ splňující $1 \le p_j \le 2^s, \ j \in \{1, \dots, d\}$. Počet různých d-tic z 2^s prvků je 2^{sd}. Platí tedy $\gamma = \mu\big((0, 1\,]^d\big) = 2^{sk}\mu\big(Q(q)\big)$. Zřejmě $\lambda_d\big(Q(q)\big) = 1/2^{sd}$, a proto

$$\mu\big(Q(p)\big) = \mu\big(Q(q)\big) = \gamma/2^{sd} = \gamma \cdot \lambda_d\big(Q(q)\big) = \gamma \cdot \lambda_d\big(Q(p)\big)$$

pro každé $p \in \mathbb{Z}^d$. Je-li $I \in \mathcal{I}^d$, existuje $s \in \mathbb{N}_0$ takové, že I je sjednocením po dvou disjunktních krychlí z $\mathcal{Q}_s$, takže $\mu(I) = \gamma \cdot \lambda_d(I)$. Podle věty 4.3 platí rovnost $\mu(A) = \gamma \cdot \lambda_d(A)$ pro každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{I}^d) = \mathcal{B}^d$. Protože $\lambda_d\big([0, 1\,]\big) = 1$ (viz poznámka 12.4(b)), z rovnosti $c = \mu\big([0, 1\,]^d\big) = \gamma \cdot \lambda_d\big([0, 1\,]^d\big) = \gamma$ dostáváme, že míra μ je na $\mathcal{B}^d$ rovna míře $c \cdot \lambda_d$. $\square$

Kapitola 14

Transformace Lebesgueovy míry při lineárních zobrazeních

Lebesgueova míra zobecňuje pojem elementárního objemu a je invariantní vůči posunutí. Zatím však nevíme, zda se míra zachovává např. při otočení — zřejmé to není ani pro interval!

Nechť $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je lineární zobrazení. Naším cílem je vyjasnit vztah mezi Lebesgueovou mírou množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ a mírou množiny $T(A)$.

Pro $a, b \in \mathbb{R}^d$ znamená, $a \cdot b$ skalární součin vektorů a, b.

14.1. Lemma. *Nechť $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je lineární zobrazení. Potom existuje $e \in \mathbb{R}^d,\ |e| = 1$, takové, že $T(x) \cdot T(e) = 0$, kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$ a $x \cdot e = 0$.*

Důkaz. Existuje $e \in \mathbb{R}^d$ takové, že $|e| = 1$ a $|T(z)| \geq |T(e)|$ pro všechna $z \in \mathbb{R}^d,\ |z| = 1$ (spojitá funkce na kompaktní množině). Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ a $x \cdot e = 0$. Definujme zobrazení $\varphi(t) := |T(e + tx)|^2$, $t \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\varphi(t) = |T(e)|^2 + 2\,t\,T(x) \cdot T(e) + t^2 |T(x)|^2,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Je-li $y = e + tx,\ t \in \mathbb{R}$, je $|y|^2 = |e|^2 + t^2|x|^2 \geq 1$. Pro $z := y/|y|$ platí $|z| = 1$ a tudíž $|T(y)| = |y||T(z)| \geq |T(e)|$. Proto platí $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, takže v bodě 0 nabývá funkce φ minima. To znamená, že $\varphi'(0) = 0$. Ovšem $\varphi'(0) = 2\,T(x) \cdot T(e)$. □

14.2. Věta (o faktorizaci lineárního zobrazení)**.** *Nechť M je regulární $(d \times d\,)$-matice. Pak existují ortonormální matice P, Q a diagonální regulární matice D takové, že $M = PDQ$.*

Důkaz. Na základě lemmatu se sestrojí ortonormální báze $\{v_1, \ldots, v_d\}$ prostoru $\mathbb{R}^d$ taková, že $Mv_i \cdot Mv_j = 0,\ i,\ j \in \{1, \ldots, d\},\ i \neq j$. Nechť $\alpha_j := |Mv_j|,\ j \in \{1, \ldots, d\}$ a D je matice s (kladnými) prvky α_j na diagonále. Dále nechť P je matice o sloupcích $w_j := (\alpha_j)^{-1} Mv_j$, Q matice o řádcích $v_j,\ j \in \{1, \ldots, d\}$. Pak PD je matice o sloupcích $Mv_j,\ j \in \{1, \ldots, d\}$, což je matice MQ' (čárka značí transponovanou matici). Je tudíž $PDQ = MQ'Q = M$. □

Nejprve předpokládejme, že lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je prosté. Pak zobrazení T^{-1} je spojité, proto obraz každé otevřené množiny při zobrazení T (což je ovšem vzor při zobrazení T^{-1}) je otevřená množina. Označíme-li tedy

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^d : \ T(A) \in \mathcal{B}^d\},$$

pak $\mathcal{A}$ je zřejmě σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny, tudíž $\mathcal{B}^d \subset \mathcal{A}$.

Pro $A \in \mathcal{B}^d$ definujme $\nu(A) := \lambda_d\big(T(A)\big)$ a $\Delta(T) := \nu\big([0,\,1\,]^d\big)$. Protože $T\big([0,\,1\,]^d\big)$ obsahuje neprázdnou otevřenou množinu $T\big((0,\,1)^d\big)$, je $\Delta(T) > 0$. Položme

$$\mu(A) := \big(\Delta(T)\big)^{-1}\nu(A)\,, \quad A \in \mathcal{B}^d\,.$$

Protože zobrazení T je lineární a prosté, snadno se ověří, že μ je míra na $\mathcal{B}^d$, která je invariantní vůči posunutí a $\mu\big([0,\,1\,]^d\big) = 1$. Podle věty 13.1 je $\mu(A) = \lambda_d(A)$, $A \in \mathcal{B}^d$, neboli $\lambda_d\big(T(A)\big) = \Delta(T)\lambda_d(A)$.

Jestliže jsou T_1, T_2 prostá lineární zobrazení $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^d$, potom

$$\begin{aligned}\Delta(T_1 \circ T_2) &= \lambda_d\big((T_1 \circ T_2)\big([0,\,1\,]^d\big)\big) = \lambda_d\big(T_1\big(T_2([0,\,1\,]^d)\big)\big)\\ &= \Delta(T_1)\lambda_d\big(T_2\big([0,\,1\,]^d\big)\big) = \Delta(T_1)\Delta(T_2)\lambda_d\big([0,\,1\,]^d\big) = \Delta(T_1)\Delta(T_2).\end{aligned}$$

Je-li $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ libovolné lineární zobrazení, označíme $\det T$ *determinant matice zobrazení* T vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^d$.

Uvažujme nyní speciální zobrazení. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ jsou vesměs nenulová reálná čísla a nechť pro $x = (x_1, \dots, x_d)$ je $T(x) := (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_d x_d)$. (Matice tohoto zobrazení má na diagonále $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, na ostatních místech nuly, takže $\det T$ je pro toto diagonální zobrazení roven součinu $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_d$). V tomto případě je $T\big([0,\,1\,]^d\big)$ kompaktní interval o délce hran $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_d|$, tedy $\lambda_d\big(T\big([0,\,1\,]^d\big)\big) = |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_d|$, takže $\Delta(T) = |\det T|$.

Další speciální zobrazení, které budeme uvažovat, je izometrické lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Podle definice tedy platí $|T(x) - T(y)| = |x - y|$, kdykoli $x, y \in \mathbb{R}^d$. (Matice zobrazení T je ortonormální, tudíž $\det T = \pm 1$.) Je-li $B := \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x| \le 1\}$, je pro takové zobrazení $T(B) = B$, takže $\lambda_d(B) = \lambda_d\big(T(B)\big) = \Delta(T)\lambda_d(B)$. Zřejmě je $\lambda_d(B) > 0$, protože B obsahuje (nedegenerovaný) otevřený interval, tedy $\Delta(T) = 1 = |\det T|$.

Tyto speciální informace stačí k tomu, abychom dokázali následující větu. (Užíváme obvyklou definici $0 \cdot \infty = 0$.)

14.3. Věta. *Nechť $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je lineární zobrazení. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{L}^d$ je $T(A) \in \mathcal{L}^d$ a*

$$\lambda_d\big(T(A)\big) = |\det T|\lambda_d(A). \tag{14.1}$$

Důkaz. Nechť nejprve T je prosté (tedy matice zobrazení T je regulární). Podle věty 14.2 existují lineární izometrická zobrazení T_1 a T_3 prostoru $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^d$ a diagonální prosté zobrazení $T_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ taková, že $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$. Protože pro každou množinu $A \in \mathcal{B}^d$ je

$$\lambda_d\big(T_j(A)\big) = \Delta(T_j)\lambda_d(A), \quad j \in \{1,2,3\}, \quad \Delta(T) = \Delta(T_1)\Delta(T_2)\Delta(T_3) \quad \text{a}$$
$$\det T = \det T_1 \cdot \det T_2 \cdot \det T_3\,,$$

platí rovnost (14.1) pro $A \in \mathcal{B}^d$. S odvoláním na věty 6.1 a 12.3 je třeba dokázat (14.1) pro $A \in \mathcal{L}^d$, pro niž $\lambda_d(A) = 0$. Existuje však $A'' \in \mathcal{B}^d$, $A \subset \subset A''$, $\lambda_d(A'') = 0$. Potom $\lambda_d\big(T(A'')\big) = |\det T|\, \lambda_d(A'') = 0$, a protože $T(A) \subset T(A'')$, je $T(A) \in \mathcal{L}^d$ a $\lambda_d\big(T(A)\big) = 0$, takže (14.1) platí.

Nechť nyní T je lineární zobrazení, které není prosté. Potom $T(\mathbb{R}^d)$ je podprostor v $\mathbb{R}^d$, jehož dimenze je menší než d. Existuje tedy nadrovina $N \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $T(\mathbb{R}^d) \subset N$. Označme nyní $H := \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_1 = 0\}$ a připomeňme, že podle lemmatu 12.2 je $\lambda_d(H) = 0$. Potom existuje prosté lineární zobrazení $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ takové, že $S(H) = N$. Zřejmě

$$\lambda_d(N) = \lambda_d\big(S(H)\big) = |\det S|\, \lambda_d(H) = 0.$$

Je-li $A \in \mathcal{L}^d$, je $T(A) \in \mathcal{L}^d$, $\lambda_d\big(T(A)\big) \le \lambda_d(N) = 0 = |\det T|\, \lambda_d(A)$ a tedy (14.1) platí. $\square$

Kapitola 15

Komentář a historické poznámky

Tato kapitola si neklade (a ani klást nemůže) nároky na úplnost. Jejím cílem je zájemcům přiblížit v historické perspektivě nejen významnější momenty ve vývoji základních pojmů a výsledků teorie míry, upozornit na důležité souvislosti, ale také zodpovědět některé přirozené otázky, většinou s odkazem na rozsáhlou literaturu věnovanou teorii míry.

1. Úvod: Teorie míry a integrálu v současné době představuje dobře etablovanou, rozsáhlou a aktivně se rozvíjející matematickou disciplínu. Pro ilustraci uvedeme namátkou několik údajů. V **MSC 2010 (Mathematics Subject Classification)**, což je klasifikace matematických disciplín užívaná referativními časopisy **Mathematical Reviews** a **Zentralblatt für Mathematik**, je pod číslem **28** vedena disciplína **Measure and integration**, která je dále dělena na celkem 6 částí, které zahrnují celkem 65 podčástí. Informace o bibliografických záznamech lze např. z Mathematical Reviews získat prostřednictvím databáze **MathSciNet**. Pod položkou *MSC Primary* **28** je k březnu 2016 evidováno 17 690 záznamů (převážně publikace od roku 1940). Např. v letech 2000–2015 bylo zpracováno 5 521 záznamů, 326 záznamů v roce 2014, v roce 2015 jejich počet činí 261. Zvolíme-li v *MSC Primary* např. **28-01** [Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)], **28-02** [Research exposition (monographs, survey articles)] a **28-03** [Historical], objeví se údaje o celkem 305 článcích a knihách. Zadáme-li filtr *MSC Primary* **28** a Publication Type *Books*, získáme údaj 503.

Již z toho je zřejmé, že od předloženého textu poskytujícího opravdu jen ty nezákladnější poznatky z teorie míry není možno očekávat žádnou originalitu ani úplnost. Nové snad mohou být jen výběr a uspořádání látky, motivace a charakter výkladu.

Jako další ilustraci rozsahu vědomostí z teorie míry uvádíme, že např. pětidílná Fremlinova monografie encyklopedického charakteru *Measure Theory* [49] obnáší celkem 2 383 stran (formát A4!). Jiný příklad: nedávno vydaná Bogacheova dvoudílná monografie *Measure Theory* [10] má celkem 1 107 stran. V seznamu literatury je uvedeno 2 038 položek, jen monografií a učebnic lze napočítat (převážně 20. století) na 300.

U matematických disciplín není rozumné pátrat po letopočtu vzniku, každá z nich má své prenatální období. Současná teorie míry vychází ze zásadních příspěvků dvou francouzských matematiků přelomu 19. a 20. století: Emila Borela a Henri Lebesguea.

V knize [11] *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898) Borel vysvětluje, jak ho výzkumy o řadách racionálních zlomků tvaru $A_n/(z-a_n)^{m_n}$ (tedy problematika funkcí komplexní proměnné) přivedly k pojmu měřitelných množin a k pojmu míry jako σ-aditivní množinové funkce. Dá se říci, že Borel axiomatiku teorie míry načrtl, aniž by však existenci a jednoznačnost míry dokázal.

Implicitně zavedl množinový systém, kterému dnes říkáme σ-algebra borelovských množin. Podrobnosti lze nalézt v [60], s. 97–106.

Borelovu myšlenku rozvinul a obohatil zásadním způsobem H. Lebesgue v roce 1901 v [81] a zejména v disertaci *Intégrale, longeur, aire* otištěné v roce 1902 v [82]. Dokázal existenci (*Lebesgueovy*) míry na systému širším než jsou borelovské množiny. Lebesgueova teorie se stala východiskem k novému (*Lebesgueovu*) integrálu.

Různým aspektům historie teorie míry a integrálu jsou věnovány např. tyto publikace: [7], [13], [18], [25] - [27], [29], [31], [33], [35], [51], [59] - [61], [63], [66], [70], [77], [86], [89] - [92], [95] - [97], [101], [103], [104], [106], [107], [112], [118].

Jestliže jsme zmínili prenatální stádium, moderní teorie míry a integrálu ideově čerpá ze starého fundamentálního principu známého více než dvě tisíciletí, z tzv. *Eudoxovy exhaustivní metody* (Eudoxos, řecký astronom, matematik a filozof, ∼408 př.n.l.–355 př.n.l.). V současném pojetí ji lze, třeba pro rovinné oblasti, popsat zhruba takto: považujeme za známý např. pojem obsahu mnohoúhelníku a jeho základní vlastnosti. Chceme určit velikost, tj. „obsah“, omezené rovinné oblasti A. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují mnohoúhelníky A', A'' takové, že $A' \subset A \subset A''$ a rozdíl obsahů A'' a A' je menší než ε, řekneme, že oblast A je *měřitelná* (tj. má obsah) a za její velikost (tj. *míru*) $m(A)$ považujeme číslo (užíváme jazyk současné matematiky)

$$m(A) := \sup\{m(A') : \ A' \subset A\} = \inf\{m(A'') : \ A \subset A''\}.$$

Pokud poslední dvě čísla jsou různá, máme definovanou „vnitřní míru“ a „vnější míru“.

V zásadě tento aproximační princip (vyčerpání zevnitř a zevně) nalezl uplatnění v definici Riemannova integrálu či Jordanova-Peanova objemu. Idea aproximace shora „jednoduššími“ množinami (v našem případě to budou spočetné systémy intervalů) je klíčem k moderní teorii míry.

2. Měřitelný prostor: Na počátku 20. století lze z hlavních tvůrců teorie míry a integrálu jmenovat tyto matematiky: H. Lebesgue, G. Vitali, W. H. Young, J. Radon, C. Carathéodory, F. Riesz, M. Fréchet, N. Luzin, Ch. de la Vallée Poussin, H. Hahn, F. Hausdorff, M. Suslin, W. Sierpiński, A. Denjoy, P. Daniell. Zhruba do roku 1915 jsou míra a integrál studovány v euklidovském prostoru, nejprve na $\mathbb{R}$, později na $\mathbb{R}^d$. Počínaje pracemi M. Frécheta (viz [40], [41], [44], [46], [47]) se začíná postupně prosazovat abstraktní přístup (obecné *množinové systémy* podmnožin *abstraktní množiny* a na nich definované *množinové funkce*).

Pojem σ-algebry $\sigma(\mathcal{S})$ generované množinovým systémem $\mathcal{S}$ je svou bezelstností zrádný. Nedává (až na triviální případy) představu, jak explicitně popsat prvky $\sigma(\mathcal{S})$ ze znalosti $\mathcal{S}$.

Problém není jednoduchý, ale lze začít uvažovat takto: definujme $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \cup \{A^c : \ A \in \mathcal{S}\}$ a pro $n > 1$ definujme $\mathcal{S}_n$ jako systém všech spočetných sjednocení množin, které jsou buďto obsaženy v $\mathcal{S}_{n-1}$ nebo jejich doplněk je obsažen v $\mathcal{S}_{n-1}$. Označme $\mathcal{S}_\omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Obecně rovnost $\mathcal{S}_\omega = \sigma(\mathcal{S})$ neplatí. Systém $\mathcal{S}_\omega$ je sice uzavřený vzhledem k doplňku, ale pokud by např. existovaly množiny $A_n \in \mathcal{S}_n \backslash \mathcal{S}_{n-1}$ pro každé n, není důvod, proč by mělo platit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}_\omega$. Je tedy třeba proces iterovat.

Označme Ω množinu všech spočetných ordinálních čísel. Pro každé $\alpha \in \Omega$ se $\mathcal{S}_\alpha$ definuje transfinitní indukcí: jestliže $\alpha \in \Omega$ není limitní ordinální číslo a β je jeho předchůdce, definujeme $\mathcal{S}_\alpha$ jako systém všech spočetných sjednocení množin, které jsou buďto obsaženy v $\mathcal{S}_\beta$ nebo jejich doplněk je obsažen v $\mathcal{S}_\beta$. V případě limitního ordinálního čísla α se definuje $\mathcal{S}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{S}_\beta$. Potom platí $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{S}_\alpha$. (Inkluze $\mathcal{S}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{S})$ pro všechna $\alpha \in \Omega$ se dokáže transfinitní indukcí, takže $\bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{S}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{S})$. K obrácené inkluzi: je-li $A_n \in \mathcal{S}_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \Omega$, a $\alpha := \sup\{\alpha_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ (což je prvek Ω!), pak $A_n \in \mathcal{S}_\alpha$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je-li $\beta \in \Omega$ následníkem ordinálního čísla α, je $\beta \in \Omega$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}_\beta$. V úvaze jsme užili známé tvrzení: každá posloupnost ordinálních čísel z Ω má v Ω supremum.)

Odtud lze odvodit tento výsledek: je-li $\mathcal{S}$ nekonečný systém mohutnosti nejvýše $\mathfrak{c}$ (mohutnost kontinua), pak $\sigma(\mathcal{S})$ má mohutnost $\mathfrak{c}$. Podrobnosti lze nalézt např. v [62], s. 132–135.

Speciálně: je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ systém intervalů s krajními racionálními body, pak platí $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}^1$ a tedy $\mathcal{B}^1$ má mohutnost kontinua. Protože Cantorovo diskontinuum C (viz poznámka 10.8(d)) má mohutnost kontinua a jeho Lebesgueova míra je rovna 0, je *každá* jeho podmnožina lebesgueovsky měřitelná. Tedy mohutnost všech lebesgueovsky měřitelných množin (na přímce či v $\mathbb{R}^d$) je $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ takže (v Cantorově diskontinuu) existují neborelovské lebesgueovsky měřitelné množiny. Platí tedy $\mathcal{B}^1 \subsetneqq \mathcal{L}^1 \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (poslední inkluze viz věta 3.4), podobně $\mathcal{B}^d \subsetneqq \mathcal{L}^d \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$.

Na topologickém prostoru X se zavádí hierarchie borelovských množin. Základní jsou: množiny otevřené (množiny „typu G“ od německého slova *Gebiet*), jejich komplementy, tj. množiny uzavřené (množiny „typu F“ od francouzského slova *fermé*), dále průniky spočetných systémů otevřených množin — ty se nazývají **množiny typu** G_δ nebo jen G_δ-množiny (δ je od německého slova *Durchschnitt* pro průnik), sjednocení spočetných systémů uzavřených množin — ty se nazývají **množiny typu** F_σ nebo jen F_σ-množiny (σ je od německého slova *Summe* pro sjednocení) a tak se dále „krok po kroku“ generují množiny typů $G_{\delta\sigma\delta\ldots\delta\sigma}$ a množiny typů $F_{\sigma\delta\sigma\ldots\sigma\delta}$. Transfinitně lze takto popsat všechny borelovské množiny.

Otázka, zda při budování takové hierarchie při přechodu na vyšší úroveň nové množiny skutečně „přibývají“, je delikátní. Odpověď je např. v euklidovském prostoru kladná; viz např. [1], s. 200. Podrobnosti a další informace lze nalézt např. v [68].

V teorii míry se kromě algeber (viz kap. 9) a σ-algeber na X zavádějí další systémy množin. Např. **okruh** se definuje jako množinový systém obsahující $\emptyset$ a uzavřený vzhledem ke konečnému sjednocení a k rozdílu množin. (Tedy okruh je algebra, pokud obsahuje X.) Podobně σ-okruh je okruh uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením. V literatuře (zejména starší) se nezřídka lze setkat s výkladem, kdy mírou je množinová funkce definovaná na σ-okruhu, nikoli na σ-algebře. (Viz např. [87] nebo [22]; kapitola IV Čechovy knihy [22] je patrně prvním textem o abstraktní teorii míry a integrálu psaným v češtině.) To se může hodit, pokud se pracuje s „velmi velkými“ prostory a požadavek „měřit velmi velké množiny“ může vést k jistým patologickým jevům. Na druhé straně teorie míry na σ-okruzích není prosta komplikací technického rázu. V současné literatuře pojetí míry jako množinové funkce definované na σ-algebře jednoznačně převažuje.

Systém $\mathcal{J}^d$ polouzavřených intervalů nemá dobré vlastnosti vzhledem k množinovým operacím (např. není uzavřený ke konečným sjednocením a k rozdílům). Proto se někdy, i v abstraktním kontextu, zavádí pojem **polookruh** a pojem objemu na polookruhu. Za určitých okolností lze objem z polookruhu $\mathcal{S}$ rozšířit na míru na $\sigma(\mathcal{S})$ a tak např. z elementárního objemu $\lambda(I)$ definovaného pro $I \in \mathcal{J}^d$ lze dospět k Lebesgueově míře (viz kapitoly 10 a 12). Takový postup nepostrádá eleganci a logiku postupného budování, ale je technicky a formálně vcelku náročný a z časových důvodů pro úvodní přednášku málo dostupný, viz např. [4], [10], Vol. 1, [35].

3. Prostor s mírou: Komentář k Lebesgueově a Lebesgueově-Stieltjesově míře odložíme do kap. 10 a 12.

Věta 3.4 (existence neměřitelné množiny)**:** Konstrukce (založená na axiomu výběru) pochází od G. Vitaliho z roku 1905; viz [128]. Z historického hlediska je zajímavý komentář S. D. Chatterjiho k Hausdorffově článku [57] v sebraných spisech F. Hausdorffa [59], Band IV, s. 11–18. Uvádí se v něm, že Hausdorff analogickou konstrukci objevil nezávisle na Vitalim. S. D. Chatterji píše: *It is clear that Hausdorff had discovered it independently of Vitali since the latter's 1905 paper on the subject* [128] *appears to have been seen by very few contemporaries; Vitali's short paper* (*the actual text, in Italian, is only* $2\frac{1}{2}$ *pages long*) *seems to have been printed privately and was not to be found in any regular mathematical journal.*

H. Lebesgue považoval Vitaliův důkaz existence neměřitelné množiny za nepřesvědčivý. Lebesgue, stejně jako Borel, uznávali pouze „efektivní“ konstrukce, uznávali matematické objekty, které lze „popsat“. Odkazujeme zde na zajímavý komentář v [35], s. 98 a [91], kap. 3, a připojujeme Lebesgueův názor z [83], vydání z roku 1928, s. 114. *Problém míry budeme studovat pouze pro tyto množiny. Nevím, zda lze definovat, nebo dokonce zda existují jiné množiny, než měřitelné.* (...) *Pokud jde o existenci neměřitelných množin, od prvního vydání této knihy* [z roku 1904] *nenastal vůbec žádný pokrok. Taková existence je ovšem jistá pro ty, kteří připouštějí určitý způsob uvažování založený na faktu, který se nazývá Zermelův axiom. Touto úvahou se k takovému závěru skutečně dospěje: neměřitelné množiny existují; ale takové tvrzení by nemělo být považováno za protimluv, pokud se podaří prokázat, že pro žádného člověka nebude možné neměřitelnou množinu pojmenovat.* (Zde se myslí, zhruba řečeno, *pojmenovat* charakteristickou vlastnost definovaného objektu; viz kap. 3 v [91].)

Obecnější pohled na existenci neměřitelné množiny (věta 3.4) nabízí zajímavé vysvětlení, proč nemůže existovat „geometrická“ míra definovaná na *všech* množinách z $\mathbb{R}^d$.

Výsledek byl dokázán S. Banachem a A. Tarskim v roce 1924; viz [3]: *Nechť* $d \geq 1$ *a* $A,\, B \subset \mathbb{R}^d$ *jsou libovolné* (případně i neomezené) *množiny s neprázdným vnitřkem. Potom existuje* (spočetný) *rozklad* $\{A_1, A_2, \ldots\}$ *množiny* A (tj. A_n jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je rovno A) *a izometrická zobrazení* $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, *taková, že* $\{f_1(A_1), f_2(A_2), \ldots\}$ *je rozklad množiny* B.

Pozoruhodným způsobem do problematiky (ne)měřitelnosti množin vnesla světlo práce R. M. Solovaye [123] z roku 1970. Aniž bychom vplouvali do hlubokých vod axiomatické teorie množin, jeho výsledek, zhruba řečeno, říká: při důkazu existence lebesgueovsky neměřitelné množiny se nelze obejít bez axiomu výběru pro nespočetné systémy množin (zasvěcený komentář a řadu odkazů na literaturu lze nalézt v [10], Vol. 1, s. 79–80). G. B. Folland v [39], s. 40, píše: *From the point of view of working analyst the effect of Solovay's theorem is to reaffirm the adequacy of the Lebesgue theory for all practical purposes.*

V souvislosti s větou 3.4 vzniká otázka, zda existuje množina neměřitelná pro *každou* Lebesgueovu-Stieltjesovu míru, přesněji, při označení z příkladu 3.3, množina $A \subset \mathbb{R}$, pro niž $A \notin \mathcal{S}_G$ pro každou neklesající zprava spojitou funkci G. Takto je otázka formulována neopatrně: je-li $G = 0$ na $(-\infty, 0)$ a $G = 1$ na $[0, \infty)$, pak $\mu_G = \varepsilon_0$ (Diracova míra v bodě 0) a $\mathcal{S}_G = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Spíše nás tedy zajímá, zda existuje $A \subset \mathbb{R}$, pro niž $A \notin \mathcal{S}_G$ pro každou nekonstantní neklesající *spojitou* funkci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Odpověď je ANO a plyne z následující věty, kterou dokázal F. Bernstein [8] v roce 1908 s užitím (ekvivalentní formy) axiomu výběru: *Existuje množina* $A \subset \mathbb{R}$ *taková, že pro každou nespočetnou uzavřenou množinu* E je $E \cap A \neq \emptyset$ a $E \cap A^c \neq \emptyset$.

Předpokládejme, že $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonstantní neklesající spojitá funkce. Připomeňme, že spočetné množiny mají pak μ_G-míru rovnou 0 (poznámka 10.8(c)) a míra μ_G je zevnitř regulární (věta 10.7). Nechť A je množina z Bernsteinovy věty a nechť $A \in \mathcal{S}_G$; odvodíme spor. Potom $\mu_G(A) = 0$, neboť všechny kompaktní podmnožiny množiny A jsou spočetné. Ze stejného důvodu je $\mu_G(A^c) = 0$, tedy $\mu_G(\mathbb{R}) = 0$ a G je tudíž konstantní; to je spor.

Věta 3.5: V zásadě jsou vlastnosti spojitosti a σ-aditivity ekvivalentní. Ukazuje to Theorem 3.2 z [4], Vol. 1: *Nechť* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *je okruh a* $\rho : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ *je konečně aditivní funkce. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (i) *pro všechny množiny* $R_n \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N},\ R_n$ *po dvou disjunktní,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{R}$, *platí* $\rho\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R_n)$;
- (ii) *pro všechny množiny* $R_n,\ R \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N},\ R_n \nearrow R$, *platí* $\lim_{n\to\infty} \rho(R_n) = \rho(R)$;
- (iii) *pro všechny množiny* $R_n, R \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N},\ R_n \searrow R$ *splňující* $\rho(R_1) < \infty$, *platí* $\lim_{n\to\infty} \rho(R_n) = \rho(R)$;
- (iv) *pro všechny množiny* $R_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N},\ R_n \searrow \emptyset$ *a* $\rho(R_1) < \infty$, *platí* $\lim_{n\to\infty} \rho(R_n) = 0$.

Připomeňme, že symbol $R_n \nearrow R$ znamená: (a) $R_n \subset R_{n+1}$; (b) $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. Analogicky pro $R_n \searrow R$.

Chápání σ-aditivity jako určitého vyjádření spojitosti lze podpořit tímto novým pohledem: Nechť $\mathcal{R}$ je algebra na X a nechť $\rho : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ je konečně aditivní funkce. Pro $R,\, S \in \mathcal{R}$ definujeme $\delta(R, S) = \rho(R \,\Delta\, S)$, kde $R \,\Delta\, S := (R \backslash S) \cup (S \backslash R)$ (*symetrická diference množin*). Zřejmě $\delta(R, S) = 0$, právě když se R a S liší o ρ-nulovou množinu. Jestliže místo $\mathcal{R}$ uvažujeme třídy ekvivalence $\mathcal{R}/\rho$ množin lišících se o ρ-nulovou množinu, potom lze δ definovat přirozeným způsobem na $\mathcal{R}/\rho$. Není těžké ověřit, že pak $(\mathcal{R}/\rho,\, \delta)$ je metrický prostor (δ je tzv. *Fréchetova-Nikodymova metrika*). Platí tato věta (viz [10], Vol. 1, Theorem 1.12.6):

Nechť ρ je konečná nezáporná konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{R}$. Potom

(a) *ρ je na $\mathcal{R}$ spočetně aditivní, právě když $\delta(R_n, \emptyset) \to 0$, kdykoli $R_n \in \mathcal{R}$ a $R_n \searrow \emptyset$;*

(b) *je-li $\mathcal{R}$ σ-algebra a ρ je míra na $\mathcal{R}$, pak metrický prostor $(\mathcal{R}/\rho,\, \delta)$ je úplný.*

Historie Fréchetovy-Nikodymovy metriky je poměrně složitá. Relevantní práce: [43], [45], [48], [98], [131]; viz komentář v [10], Vol. 1, s. 418.

Věta 3.8: Toto jednoduché tvrzení spojované se jménem F. P. Cantelliho má četné aplikace v teorii pravděpodobnosti; viz např. [5].

Všimněme si, že pro charakteristické funkce χ_{A_n} (libovolných) množin A_n, $n \in \mathbb{N}$, platí pro $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n$ rovnost

$$\chi_A = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}.$$

Proto se často takto definovaná množina A nazývá *limes superior* posloupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značí se $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

Analogicky se definuje

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n.$$

Je to množina všech bodů x, které leží ve všech množinách A_n s výjimkou konečného počtu.

Často se místo Cantelliovo lemma říkává Borelovo-Cantelliovo lemma. Ve skutečnosti „Borelova část“ tvrzení se týká jistého *obrácení* tvrzení z věty 3.8: *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou nezávislých měřitelných množin taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$. Potom $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.*

Zde již jsme na teritoriu teorie pravděpodobnosti. Připomeňme, že posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{A}$ se nazývá posloupnost **po dvou nezávislých množin**, jestliže

$$\mu(A_j \cap A_k) = \mu(A_j) \cdot \mu(A_k),$$

kdykoli $j, k \in \mathbb{N},\ j \neq k$.

Tvrzení se většinou formuluje pro posloupnost vzájemně nezávislých množin (= *jevů*), tedy ne jen *po dvou* nezávislých. Autory výše uvedené zlepšené verze pocházející z roku 1959 jsou P. Erdös a A. Rényi; viz [5], s. 70.

Cantelliovo lemma zajímavým způsobem doplňuje toto tvrzení pocházející od V. Ptáka z roku 1963; viz [108]: *Je-li* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *pravděpodobnostní prostor,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost množin z* $\mathcal{A}$ *taková, že* $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) > 0$*, potom existuje posloupnost* $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *přirozených čísel taková, že* $\mu\big(\bigcap_{j=1}^{n} A_{k_j}\big) > 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Vztahy mezi teorií míry a teorií pravděpodobnosti jsou hluboké. Zájemce odkazujeme např. na [5] či na článek [24], z něhož citujeme: *Since the publication in 1933 of Kolmogorov's famous monograph* Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung, *it has been well-known that probability theory is essentially a branch of measure theory, „with its own special emphasis and field of application"* (Doob, Stochastic Processes (1953) Preface). *The fact that the branch has invigorated the main tree for many years is emphasized less often, even though this cannot be considered to be a secret.*

4. Dynkinův systém: Někteří autoři (viz např. [39], [116]) místo techniky Dynkinových systémů užívají alternativní přístup.

Nechť X je množina a $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom $\mathcal{M}$ se nazývá **monotónní systém**, jestliže $\mathcal{M}$ je uzavřený vzhledem ke sjednocení neklesajících posloupností a k průniku nerostoucích posloupností množin z $\mathcal{M}$. Z definice okamžitě plyne, že každá σ-algebra je monotónní systém. Dále: je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak existuje nejmenší monotónní systém obsahující $\mathcal{S}$, tzv. **monotónní systém generovaný** $\mathcal{S}$ (totiž průnik všech monotónních systémů, které $\mathcal{S}$ obsahují). Význam monotónních systémů je patrný z tohoto tvrzení: *Je-li* $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ *algebra, pak monotónní systém generovaný* $\mathcal{S}$ *splývá se* $\sigma(\mathcal{S})$.

Technika Dynkinových systémů je systematicky využívána v knize E. B. Dynkina o Markovských procesech [34]. (Dynkin užívá termín „λ-systém".) Takové systémy byly vyšetřovány W. Sierpińskim již v roce 1928; viz [121]. Variantu věty o Dynkinových systémech, tzv. *transporter theorem*, a její aplikace lze nalézt v [72].

Věta 4.3: Toto je základní věta o jednoznačnosti pro σ-konečné míry. Připomeňme, že prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá **prostor se σ-konečnou mírou**, jestliže existuje posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin z $\mathcal{A}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ a $\mu(X_n) < \infty$ pro každé n.

5. Úplný prostor s mírou: Věta o zúplnění pochází od M. Frécheta (1920); viz [42].

6. Radonova míra: V roce 1910 studoval H. Lebesgue v [85] obecnější míry $\mathbb{R}^d$ v souvislosti s hledáním analogie jednorozměrného neurčitého integrálu pro funkce více proměnných. J. Radon v roce 1913, viz [111], dal základ teorie integrálu vzhledem, v současné terminologii, k regulární míře. Jeho teorie zahrnuje Lebesgueovy-Stieltjesovy míry (v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^d$); viz komentář *Measure, Integration and Potential Theory* H. Bauera v [110], s. 29–44.

Zdůrazňujeme, že se definice Radonovy míry v literatuře různí; viz např. [4], [14], [52], [87]. Naše terminologie je shodná s [49], Vol. 2.

Pro topologické míry na obecných topologických prostorech je problematika regularity složitá. Ilustrují to mj. příklady z kap. VIII v [35]; viz též [4], [52], [116]. V [35] je uvedena řada odkazů na četné výsledky disciplíny, která se nazývá *topologická teorie míry.* Té je mj. věnován 4. díl Fremlinovy *Measure Theory* [49] (obnáší 986 stran formátu A4).

Radonovy míry se přirozeným způsobem objevují v souvislosti s reprezentací lineárních funkcionálů na prostorech spojitých funkcí. Jako vzorek zmíníme tuto situaci: *Nechť* X *je lokálně kompaktní topologický prostor* (tj. Hausdorffův prostor, v němž každý bod má okolí, jehož uzávěr je kompaktní). *Je-li* μ *topologická míra na* X *konečná na kompaktních množinách, potom zobrazení*

$$\Phi_\mu : f \mapsto \int_X f \, d\mu \tag{15.1}$$

definuje nezáporný lineární funkcionál na prostoru $C_c(X)$ *spojitých funkcí s kompaktním nosičem v* X (viz kap. 2 v [116]). Přirozená otázka: existují na $C_c(X)$ *jiné* nezáporné lineární funkcionály? (Myslí se tedy funkcionály, které nejsou tvaru (15.1).) Přesněji: ptáme se, zda pro každý nezáporný lineární funkcionál $\Phi : C_c(X) \to \mathbb{R}$ existuje topologická míra μ konečná na kompaktních množinách taková, že $\Phi = \Phi_\mu$. Ještě jinak řečeno: lze každý nezáporný lineární funkcionál na $C_c(X)$ reprezentovat mírou?

Rieszova věta o reprezentaci dává kladnou odpověď, avšak reprezentující míra není obecně určena jednoznačně. Význam Radonových měr je zdůrazněn touto větou (viz [4], Theorem 29.3): *Nechť* Φ *je nezáporný lineární funkcionál na* $C_c(X)$. *Potom existuje právě jedna Radonova míra* μ, *která* Φ *reprezentuje, tj.*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad f \in C_c(X).$$

Pro další diskusi o Radonových mírách, o regularitě a o různých verzích Rieszovy věty o reprezentaci odkazujeme např. na [4], [39], [49], Vol. 4, [116].

O významu Rieszovy věty o reprezentaci D. W. Strook říká (viz [127], s. 147): *Indeed, it seems to say that it is essentially impossible to avoid Lebesgue's theory of integration.*

Pomocí Rieszovy věty o reprezentaci W. Rudin (viz [116], věta 2.20) *definuje* Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^d$. Ve skutečnosti Lebesgueova míra při tomto přístupu je reprezentující míra funkcionálu Φ, který funkci $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ přiřazuje hodnotu Riemannova integrálu z f. (Ovšem Rudin navrhuje pro Φ definici, která znalost vícerozměrného Riemannova integrálu obchází.)

Důležitost (nezáporných) lineárních funkcionálů je dramatickým způsobem zdůrazněna v [14]; pro N. Bourbakiho *není* (Radonova) míra množinová funkce, nýbrž funkcionál.

7. Vnější Lebesgueova míra: Pro $d = 1$ se definice $\lambda_d^*(A)$ shoduje s původní Lebesgueovou definicí z [81] a [82]. (Snadno je vidět, že není podstatné, zda se pokrývá polouzavřenými, otevřenými či uzavřenými intervaly.) Lebesgueova definice vychází z Borelových myšlenek a je zobecněním vnějšího Jordanova-Peanova objemu. Jak již bylo opakovaně řečeno, pokrývání *spočetným* systémem množin se zdá být *na první pohled* nepodstatná modifikace, ale ve skutečnosti *zcela zásadní* pro vlastnosti Lebesgueovy míry odvozené z λ_d^*.

8. Generování vnější míry: Abstraktní definice vnější míry generované $(\mathcal{T}, \tau)$ je modelována po vzoru vnější Lebesgueovy míry.

9. Carathéodoryova věta pro vnější míru: Vnější míra byla definována a studována C. Carathéodorym v roce 1914 (viz [20]). Ve skutečnosti Carathéodory pracuje v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^d$ a k podmínkám (a), (b), (c) z definice přidává podmínku

(d) jestliže vzdálenost (neprázdných) množin A a B je kladná, potom

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)\,.$$

Za této situace Carathéodory dokazuje, že všechny otevřené množiny z $\mathbb{R}^d$ jsou μ^*-měřitelné.

Podmínka (d) má ovšem smysl v libovolném metrickém prostoru (X, ρ). (Vzdálenost neprázdných množin A, B je definována jako $\inf\{\, \rho(a,b) :\ a \in A,\ b \in B\}$.) Potom se vnější míra splňující (a)-(d) nazývá **metrická vnější míra**. Význam podmínky (d) je ilustrován touto větou (viz např. [35], Satz 9.3): *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a μ^* je vnější míra. Potom je každá borelovská množina μ^*-měřitelná, právě když μ^* je metrická vnější míra.*

Carathéodoryova původní axiomatika vnější míry zahrnuje ještě další podmínku:

(e) pro každou množinu $E \subset X$ platí $\mu^*(E) = \inf\{\, \mu^*(A) :\ E \subset A,\ A$ je μ^*-měřitelná $\}$.

Carathéodory ukazuje, že pro každou množinu $E \subset X$, pro niž $\mu^*(E) < \infty$, existuje μ^*-měřitelná množina A taková, že $E \subset A$ a $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.

Tuto vlastnost mají vnější míry odvozené přirozeným způsobem z míry:

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Pro $E \subset X$ definujeme

$$\tilde{\mu}(E) := \inf\{\, \mu(A) :\ A \in \mathcal{A},\ E \subset A\}. \tag{15.2}$$

Snadno se ověří (podrobnosti lze nalézt v [49], Vol. 1, Proposition 132A), že $\tilde{\mu}$ je vnější míra na X a pro každou množinu $E \subset X$ existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $E \subset A$ a $\tilde{\mu}(E) = \mu(A)$.

Nechť μ^* je vnější míra na X, nechť μ je míra získaná Carathéodoryovou metodou a $\tilde{\mu}$ je vnější míra definovaná v (15.2). Obecně rovnost $\tilde{\mu} = \mu^*$ neplatí. *Příklad:* Nechť X má alespoň 3 prvky. Definujme $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 1$ a pro $E \subset X$, $E \neq \emptyset$, $E \neq X$, definujme $\mu^*(E) = \frac{1}{2}$. Potom μ^* je vnější míra, E je μ^*-měřitelná, právě když $E = \emptyset$ nebo $E = X$ a tedy $\tilde{\mu}(E) = 1$, kdykoli $E \subset X$, $E \neq \emptyset$, takže $\tilde{\mu} \neq \mu^*$.

Říkáme, že μ^* je **regulární vnější míra** na X, jestliže $\tilde{\mu} = \mu^*$.

Vždy platí $\tilde{\mu}(E) \le \mu^*(E)$, $E \subset X$. Za situace popsané v lemmatu 10.6 platí

$$\mu^*(E) = \inf\big\{\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ E \subset A\big\}.$$

Rovnost je zřejmá, pokud $\mu^*(E) = \infty$. Je-li $\mu^*(E) < \infty$, existují množiny $T_n \in \mathcal{T}$ takové, že $E \subset A := \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Potom $A \in \sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{A}$ a $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Vidíme, že μ^* je regulární vnější míra. (Speciálně λ_d^* a μ_G^* (viz důkaz věty 10.7) jsou regulární vnější míry.) Pokud μ^* je regulární vnější míra, pak pro každou neklesající posloupnost $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ podmnožin z X platí $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$: viz [49], Proposition 132A.

Příklad 9.2(c). Pojem p-rozměrné míry v $\mathbb{R}^d$ se vyskytuje již v práci C. Carathéodoryho v roce 1914; viz [20]. Důraz je tam kladen na pojem **lineární míry** (v pozdější terminologii: na jednorozměrnou Hausdorffovu míru). Motivace F. Hausdorffa v jeho práci [58] z roku 1919 mířila jiným směrem. Měl zájem o definici kvantitativní veličiny (**Hausdorffovy dimenze**), která umožňuje v $\mathbb{R}^d$ klasifikovat množiny podle velikosti ve *spojité* škále pro $p \in [0, d]$. Podrobný výklad o přínosu C. Carathéodoryho a F. Hausdorffa k p-rozměrné míře odkazujeme na [103] a na komentář S. D. Chatterjiho k Hausdorffově práci [58] ve 4. díle Hausdorffových sebraných spisů [59]. Při naší definici Hausdorffovy míry H_p, jak jsme již uvedli, platí pro vhodnou konstantu $\gamma > 0$ rovnost $\gamma\, H_d = \lambda_d$. Není jednoduché dokázat, že γ se rovná objemu d-rozměrné koule o průměru 1, tedy číslu $\pi^{d/2}/2^d\Gamma\bigl(\frac{d}{2}+1\bigr)$; viz [35], Satz V. 1.16, [36], kap. 2.2., nebo [75].

Poznamenejme ještě, že Hausdorff pracuje s jemnější škálou měr: uvažuje „měrnou" funkci $\tau(T) := h(\mathrm{diam} T)$ pro $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ spojitou a rostoucí, splňující $h(0) = 0$ (tedy nejen funkce tvaru $h : t \mapsto t^p,\ t \in [0, \infty)$).

Definice měřitelnosti à la Carathéodory, zavedená v roce 1914 v [20], bývá někdy považována za poněkud záhadnou.

Např. G. B. Folland v [39] na s. 28 píše: *The notion of μ^*-measurability is perhaps not very intuitive at first, but it is extremely useful because of the following theorem.* (Odkaz je na tvrzení naší věty 9.4.)

Autoři [62] v Remark (10.6) píší: *Definition* [of Carathéodory measurable sets] *has a somewhat artificial air. It singles out the subsets A of X which A splits all subsets E of X into two pieces on which μ^* adds. How Carathéodory came to think of this definition seems mysterious, since it is not in the least intuitive. Carathéodory's definition has many useful implications. It gives us a σ-algebra, although not necessarily the largest possible σ-algebra, on which μ^* is countably additive measure.*

Sám Carathéodory v krátké poznámce *Zur Geschichte der Definition der Meßbarkeit*, viz [21], s. 276–277, zbavuje svou definici jakéhokoli přídechu záhadnosti a konstatuje, že jeho přístup byl přímo inspirován Lebesgueovou definicí.

Naše definice λ_1^*, jak jsme již uvedli, je shodná s původní Lebesgueovou definicí.

Pro omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue prohlásí množinu A za *měřitelnou*, pokud

$$\lambda_1^*(A) + \lambda_1^*\bigl((a,b)\setminus A\bigr) = b - a, \tag{15.3}$$

kde (a, b) je (jeden či libovolný) omezený interval obsahující množinu A. Motivací pro tuto volbu mohla být vlastnost jednorozměrného Jordan-Peanova objemu κ^*: je-li $A \subset (a,b)$, potom $\kappa^*(A)+\kappa^*\big((a,b)\setminus A\big) = b-a$; srv. [60], s. 123. (Pro neomezené množiny se měřitelnost definuje přirozeným způsobem: A se prohlásí za měřitelnou množinu, jestliže $A \cap I$ je měřitelná množina pro každý omezený interval $I \subset \mathbb{R}$.)

Abychom lépe pochopili Lebesgueovu definici, uvažujeme následující obecnější situaci. Nechť μ^* je vnější míra na X a nechť $\mu^*(X) < \infty$. Pro $A \subset X$ definujme **vnitřní míru** množiny A rovností $\mu_*(A) := \mu^*(X)-\mu^*(A^c)$. Potom A je μ^*-měřitelná, právě když $\mu^*(A) = \mu_*(A)$; viz např. [39], s. 31. Tedy Lebesgueova definice vyjadřuje shodu vnější a vnitřní míry.

Zdůrazňujeme, že zatímco *vnější Lebesgueova míra* je definována pomocí *vnější aproximace* jednoduššími množinami (= intervaly), jejichž míru považujeme za známou, vnitřní míra je definována pomocí vnější míry, *nikoli pomocí aproximace zevnitř*, jako je tomu např. pomocí intervalů u Jordanova-Peanova objemu.

Carathéodory v [21], s. 276, vysvětluje, jak byl přiveden k definici μ^*-měřitelných množin. Uvádí, že v červenci 1914 dokázal v analogii s (15.3) tuto větu: *Jestliže množina* $A \subset \mathbb{R}$ *je lebesgueovsky měřitelná, pak pro každou množinu* $E \subset \mathbb{R}$ (nejen pro interval), *platí*

$$\lambda_1^*(E) = \lambda_1^*(E \cap A) + \lambda_1^*(E \cap A^c). \tag{15.4}$$

Pokračuje: jestliže se (15.4) vezme za definici měřitelnosti, pak se z lebesgueovské (Carathéodory říká: borelovské-lebesgueovské) teorie žádné měřitelné množiny neztrácejí, ačkoli zdánlivě systém množin měřitelných podle (15.4) je užší než podle (15.3).

Carathéodory vyzdvihuje přednosti nové definice:

- lze ji užít na lineární míru (tj. *jednorozměrnou Hausdorffovu míru*);
- hodí se pro množiny nekonečné vnější Lebesgueovy míry;
- důkazy základních vět teorie jsou nesrovnatelně snazší a kratší než důkazy dříve známé;
- zásadní přednost spočívá v tom, že nová definice je nezávislá na pojmu vnitřní míry.

Carathéodoryova věta 9.4 pochází z [20]. Věta 9.6 se někdy spojuje se jménem E. Hopfa (*Hopfova věta o rozšíření*), bývá připisována H. Hahnovi či C. Carathéodoryovi, ale byla dokázána M. Fréchetem ve [46]. Důkaz založený na Carathéodoryově větě pochází od H. Hahna [55] a A. Kolmogorova [71]. Má důležité aplikace, např. při důkazu existence a jednoznačnosti součinové míry na součinu nekonečně mnoha prostorů s mírou; viz např. [127], s. 147–150.

10. Lebesgueova míra a Lebesgueova-Stieltjesova míra: Podle věty 10.7 generuje neklesající zprava spojitá funkce $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgueovu-Stieltjesovu míru μ_G. Funkci G se někdy říká *Stieltjes measure function* na počest T. J. Stieltjese, který takové funkce užil k definici integrálu zobecňujícího Riemannův integrál.

Jenom zběžně se o definici Stieltjesova integrálu zmíníme (viz [62], Chapter 3, [127], Chapter 1). Nechť jsou dány $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce a dělení

$D := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$. *Stieltjesův součet* je definován takto:

$$S_D(f; G) := \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\big(G(x_j) - G(x_{j-1})\big),$$

kde $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Funkce f se nazývá *stieltjesovsky integrovatelná*, jestliže existuje číslo s s touto vlastností: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ s normou menší než δ je

$$\sup \big|S_D(f; G) - s\big| < \varepsilon,$$

kde supremum se bere přes všechny volby $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. (Normou dělení D se rozumí číslo $\max \big\{ x_j - x_{j-1} : \ j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$.) Pokud číslo s s uvedenou vlastností existuje, říká se, že Stieltjesův integrál funkce f vzhledem k funkci G existuje a místo s se píše $\int_a^b f\, dG$. Je známo, že Stieltjesův integrál existuje pro každou spojitou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; viz např. [127], Theorem 1.2.10.

Historicky vzato, pro Stieltjese hlavní motivací pro definici „nového" integrálu bylo studium řetězových zlomků v souvislosti s funkcemi komplexní proměnné; viz Stieltjesova práce [125] z roku 1894. Stieltjesův integrál stál po nějaký čas v pozadí zájmu matematiků. Pozornost matematiků, především H. Lebesguea a J. Radona, podnítil tento fundamentální výsledek F. Riesze z roku 1909; viz [113]: *Je-li* Φ *nezáporný lineární funkcionál na prostoru* $\mathcal{C}\big([a, b]\big)$ *všech spojitých funkcí na intervalu* $[a, b]$*, potom existuje „Stieltjes measure function"* G taková, že

$$\Phi(f) = \int_a^b f\, dG, \qquad f \in \mathcal{C}\big([a, b]\big). \tag{15.5}$$

(Výsledek F. Riesze je ve skutečnosti obecnější a dává reprezentaci (15.5) pro *spojitý* lineární funkcionál; pak ovšem místo G v (15.5) figuruje tzv. *funkce s konečnou variací*, tedy *rozdíl* dvou neklesajících funkcí; viz [116], s. 168, 178.)

Samozřejmě volba $G : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, v definici Stieltjesova integrálu vede k původní Riemannově definici a věta 10.7 je v tomto případě větou o existenci, jednoznačnosti a vlastnostech jednorozměrné míry λ_1.

Ještě metodická a historická poznámka k důkazu nerovnosti (10.1). Zde pro první čtení lze vřele doporučit sledovat důkaz pro případ „délky intervalu", tj. pro volbu $G : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$. Mluvíme-li o nerovnosti (10.1), jsme přímo „u pramene" teorie míry a moderní definice kompaktnosti.

Již jsme se zmínili o Borelových výzkumech z let 1894, 1895 věnovaných funkcím komplexní proměnné; viz [12]. Borel (stejně jako A. Harnack v roce 1885 před ním) si byl vědom toho, že každou spočetnou množinu v $\mathbb{R}$ lze pokrýt intervaly o libovolně malé sumární délce. Buďme přesnější: je-li $S \subset \mathbb{R}$ spočetná, pak pro každé $\eta > 0$ existují intervaly $I_1, I_2, \ldots$ takové, že $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a pro jejich délky $d(I_n)$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} d(I_n) < \eta$.

Ke svému zkoumání potřeboval Borel v zásadě tuto informaci: Jsou-li I_n, $n \in \mathbb{N}$, uzavřené intervaly pokrývající interval $[a, b]$ a jejich sumární délka je *menší* než $b - a$, pak existuje $x \in [a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. (Z toho již Borel odvodil, na základě výše uvedené informace o „metrické malosti" spočetných množin, že takových bodů existuje nespočetně mnoho.)

Borelův argument je zajímavý: předpokládejme, že takový bod neexistuje. Pak lze předpokládat, že sjednocení I_n *bez koncových bodů* (tedy vnitřků I_n) obsahuje celý interval $[a, b]$ („jinak bychom každý interval trochu na obě strany prodloužili, aby stále sumární délka byla menší než $b-a$"). A zde Borel připouští, že by se tvrzení mohlo zdát samozřejmé. Konstatuje, že s ohledem na důležitost takového tvrzení nabízí důkaz „založený na větě, která je sama o sobě zajímavá": *Jestliže na reálné ose máme nekonečně mnoho* [myslí se spočetně] *intervalů takových, že každý bod* [myslí se bod intervalu $[a, b]$] *leží uvnitř alespoň jednoho z nich, potom lze mezi těmito intervaly efektivně určit* konečný *počet intervalů majících stejnou vlastnost.* Zde se tedy setkáváme s formulací tzv. *Borelovy věty* (někdy nazývané Heine-Borelovou větou). Další informace lze nalézt např. v [61], s. 97–106 a také v [105].

V učebnicích a monografiích se obvykle při důkazu (10.1) užívá právě redukce na konečné pokrytí (zhruba řečeno: I se trochu zmenší na uzavřený interval a I_n se trochu zvětší na otevřené intervaly). Pro konečné pokrytí pak lemma bývá často i považováno za samozřejmé. D. H. Fremlin v [49], Vol. 1, s. 33 píše: *I do not agree that lemma is trivial when we have a finite sequence $I_1, \dots, I_m$ covering I. I invite you to consider this for yourself.*

Lemma 10.1 a věta 10.2 jsou formulovány pro $\mathbb{R}^d$, ačkoli kap. 10 je věnována jednorozměrné situaci. Je to příprava na kap. 12, kde je diskutována Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^d$ a opakovat argumenty „nadvakrát" by nebylo účelné. Na druhé straně zvládnutí důkazu lemmatu 10.5, nejlépe nejprve pro $G : x \mapsto x,\ x \in \mathbb{R}$, považuji za klíč k (již vcelku snadnému pochopení) důkazu lemmatu 12.1.

Poznámky 10.8 (d), (e), (f): Cantorovo diskontinuum bylo uvedeno (definice pomocí trojkové soustavy) jako příklad řídké *perfektní* (tj. řídké uzavřené bez izolovaných bodů; viz [64], s. 158, [35], s. 70) množiny reálných čísel v Cantorově práci [19] z roku 1883, viz [38]. Geometrická podoba diskontinuí (založená na postupném vyjímání vhodných intervalů z $[0, 1]$) pochází od H. J. S. Smithe z roku 1875; viz [122]. Zejména existence perfektních řídkých množin, které mají (v naší terminologii) kladnou míru, sehrála v poslední čtvrtině 19. století významnou úlohu v teorii integrálu; viz [60], [101]. V té době ještě nebyly dostatečně pochopeny rozdíly mezi různými pojmy „malosti" množin: množina *malá* ve smyslu *mohutnosti*, ve smyslu *metrickém* a ve smyslu *topologickém*.

Soustřeďme se na podmnožiny reálné osy. Označme $\mathcal{C}$ (= *cardinality*) systém všech spočetných množin, $\mathcal{M}$ (= *measure*) systém všech množin Lebesgueovy míry nula a $\mathcal{T}$ (= *topology*) systém všech řídkých množin. Tedy každý z těchto systémů vystihuje jakousi „malost" množiny. Problém je v tom, že mezi $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{T}$ nejsou (takřka) žádné vztahy. Samozřejmě, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, ale to je všechno.

Neplatí: $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ (Cantorovo diskontinuum), $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ (množina racionálních čísel), $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ (množina K_δ z poznámky 10.8(f)), $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ (množina racionálních čísel), $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ (Cantorovo diskontinuum).

Označme $\mathcal{K}$ systém všech kompaktních řídkých množin v $\mathbb{R}$, které mají kladnou Lebesgueovu míru. Z poznámky 10.8(f) víme, že pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ existuje množina $K \in \mathcal{K}$ taková, že $K \subset G$. Tuto informaci lze užít ke konstrukci pozoruhodné množiny. Tvrzení:

Existuje borelovská množina $A \subset \mathbb{R}$ taková, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $\lambda_1(I \cap A) > 0$ a $\lambda_1(I \cap A^c) > 0$.

Zavedeme tuto terminologii: Je-li $G \subset \mathbb{R}$, a jsou-li C, D podmnožiny $\mathbb{R}$, pak dvojici $\{C, D\}$ nazveme *vhodnou* pro G, jestliže $C, D \in \mathcal{K}$ a množiny C, D jsou disjunktní podmnožiny G.

Důkaz tvrzení: Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech nedegenerovaných otevřených intervalů v $[0,1]$ s racionálními krajními body. Zvolme množiny A_1, B_1 tak, aby dvojice $\{A_1, B_1\}$ byla vhodná pro I_1. Je-li $n \geq 1$ a $\{A_n, B_n\}$ je dvojice vhodná pro I_n, pak $G := I_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cup B_j)$ je neprázdná otevřená množina a můžeme definovat množiny A_{n+1}, B_{n+1} takové, že dvojice $\{A_{n+1}, B_{n+1}\}$ je vhodná pro G.

Definujme $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Je-li $I \subset [0,1]$ nedegenerovaný interval, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $I_n \subset I$. Protože I_n obsahuje $A_n, B_n \in \mathcal{K}$, je $\lambda_1(I \cap B) \geq \lambda_1(I_n \cap B_n) > 0$ a $\lambda_1(I \cap B^c) \geq \lambda_1(I_n \cap A_n) > 0$. Množina $A := \bigcup\{B + m : m \in \mathbb{Z}\}$ zřejmě má požadovanou vlastnost.

Nabízí se ambicióznější otázka: Lze takovou borelovskou množinu A sestrojit „spravedlivě“, tj. tak, aby pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ platilo $\lambda_1(I \cap A) = \lambda_1(I \cap A^c)$ $\big(= \frac{1}{2}\lambda_1(I)\big)$? Odpověď je negativní, jak plyne z tzv. *věty o hustotě*. Ještě než ji vyslovíme, zopakujeme, že lebesgueovsky měřitelná množina (konečné míry) má, neformálně řečeno, tuto strukturu: (konečné sjednocení otevřených intervalů) *plus* (libovolně malá množina) *minus* (libovolně malá množina). (Toto je parafráze věty o regularitě Lebesgueovy míry; viz příklad 3.2.) Takže, hodně nepřesně řečeno, z globálního hlediska se množiny konečné míry aproximativně (až na libovolně *malou* chybu) shodují s konečným sjednocením intervalů. Ve skutečnosti se ale každá lebesgueovsky měřitelná množina *lokálně* chová podle zásady *všechno nebo nic*. Až na zanedbatelný „odpad“ (= *množina míry nula*) je taková množina v blízkosti každého bodu z $\mathbb{R}$ hodně nahuštěná (masivní) nebo hodně rozředěná (hubená). Matematický smysl vyjadřuje tato věta o hustotě:

Je-li $A \in \mathcal{L}^1$, pak skoro všechny body množiny A, jsou body hustoty, tj. existuje $N \subset A$ taková, že $\lambda_1(N) = 0$ a pro každé $x \in A \setminus N$ platí

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\lambda_1\big(A \cap (x-h,\, x+h)\big)}{2h} = 1\,.$$

(Limita vlevo, pokud existuje, se nazývá (metrická) **hustota množiny** A v bodě x.) Tedy: ve skoro všech bodech z A je hustota množiny A rovna 1 a ve skoro všech bodech množiny A^c je hustota množiny A rovna 0. Z definice hustoty je patrné, že věta o hustotě souvisí s derivováním měr; viz [116], kap. 7, odst. 7–12. Elementární důkaz věty o hustotě je uveden v [133]; viz též [99], Theorem 3.20.

Již jsme se dostatečně seznámili s vlastnostmi borelovských a lebesgueovsky měřitelných množin, pokud jde o množinové operace. Na závěr se ještě zmíníme o tom, jak se systémy $\mathcal{B}^1$ a $\mathcal{L}^1$ chovají vzhledem ke spojitým a homeomorfním zobrazením.

Úvahy z poznámky 10.8(e) ukazují, že homeomorfní obraz borelovské množiny je borelovská množina, zatímco homeomorfní obraz lebesgueovsky měřitelné množiny nemusí být ani množina borelovská. Důvodem je, že homeomorfismus obecně nezachovává množiny míry 0. Neformálně řečeno, pro homeomorfismus f (na rozdíl např. od lipschitzovského zobrazení) nemáme pro intervaly I žádnou kontrolu shora pro podíly $\lambda_1\big(f(I)\big)/\lambda_1(I)$.

Delikátnější je situace spojitých obrazů borelovských množin. V roce 1905 se H. Lebesgue v článku [84] dopustil „slavné chyby“, když tvrdil, že projekce na souřadnicovou osu (což je spojitý obraz) každé množiny z $\mathcal{B}^2$ padne do $\mathcal{B}^1$. Chybu odhalil mladý ruský matematik M. J. Suslin (1894 – 1919) v roce 1917. „Šťastná Lebesgueova chyba“ otevřela tak novou matematickou disciplínu, tzv. *deskriptivní teorii množin.* Speciálně Suslin a N. N. Luzin (a také P. S. Aleksandrov) stáli u zrodu pojmu *analytické množiny.* Systém analytických množin (někdy nazývaných *suslinovské množiny*) obsahuje jako vlastní část systém borelovských množin a jeho významná vlastnost spočívá mj. v příznivém chování vzhledem ke spojitým zobrazením. Jako ilustraci můžeme zmínit z [10], s. 39, 40: *Nechť* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ *je spojité zobrazení a* $A\subset\mathbb{R}^d$ *je analytická množina. Potom* $f(A)$ *je analytická množina.* Speciálně: *spojitý obraz borelovské množiny je analytická* (ne nutně borelovská) *množina.*

Z rozsáhlé literatury věnované analytickým množinám uvádíme např. [68], [10], Vol. I, II; základní informaci lze nalézt v [1] a komentář k historii pojmu analytické množiny např. v [6].

Poznámka 10.8 (g): Výsledek pochází od H. Steinhause z roku 1920; viz [124]; analogické tvrzení bylo pro $\mathbb{R}^d$ dokázáno H. Rademacherem v [109]. Zobecnění Steinhausovy věty lze nalézt v [9], [76] a její obrácení v [93].

Není bez zajímavosti poznamenat, že existují borelovské množiny A, pro něž $A-A$ *není* borelovská množina; viz [115].

11. Pravděpodobnostní míry a distribuční funkce: Věta 11.1 je speciálním případem věty 10.7. Alternativní důkaz věty 11.1 (míra μ se vytvoří jako „zobecněný obraz“ jednorozměrné Lebesgueovy míry) lze nalézt např. v kap. 6 textu *Lebesgueova míra*, který je k dispozici na `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/`. S ohledem na vzájemně jednoznačnou korependenci mezi distribučními funkcemi a pravděpodobnostními mírami (věta 11.1) se místo označení $\int f\,d\mu$ užívá $\int f\,dF$.

Poznamenejme, že se často přiřazuje *reálná* σ-aditivní množinová funkce (obecně není nezáporná) *funkci s konečnou variací*; viz [116], s. 168, 178. Míry, které jsou odvozeny od spojité (či libovolné) reálné funkce na $\mathbb{R}$ jsou studovány např. v [15], [16].

12. Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^d$:

Lemma 12.1: Podobně jako v jednorozměrném případě, mnozí autoři pro důkaz nerovnosti $\big(N(d)\big)$ užívají redukci na konečný systém pokrývajících intervalů pomocí Borelovy věty. Potom lze důkaz plausibilním způsobem verbálně popsat (viz např. [99]) a v $\mathbb{R}^2$ doprovodit přesvědčivým obrázkem. Avšak precizní formální důkaz vždy vyžaduje určitou práci. D. H. Fremlin v [49], Vol. 1, s. 33, odmítá, že by po redukci na konečně mnoho intervalů bylo možné tvrzení prohlásit za triviální a říká: *It seems to me that any rigorous argument must involve an induction on the dimension, which is what I provide here.* S malou modifikací je Fremlinův důkaz převzat v tomto textu.

Věta 12.3: Lebesgueova míra je jedním z centrálních pojmů matematické analýzy. Není divu, že existuje celá řada alternativních přístupů k jejímu zavedení. Některé z nich uvedeme.

(a) **Konstrukce na základě vnější míry:** Vyslovit definici vnější Lebsgueovy míry je snadné. Stěžejní problém ovšem spočívá ve *vymezení systému měřitelných množin.* Jedno z nich je užití Carathéodoryovy definice měřitelnosti — to byl náš přístup. Je možné užít Lebesgueův přístup založený na rovnosti vnější a vnitřní míry.

W. H. Young [132], 1905, prohlašuje množinu $A \subset \mathbb{R}$ za měřitelnou, jestliže platí $\lambda_1^*(A\cup \cup B) = \lambda_1^*(A) + \lambda_1^*(B)$ pro *každou* množinu $B \subset \mathbb{R}\backslash A$. Geometricky příjemná je tato definice: množina $A \subset \mathbb{R}^d$ se prohlásí za měřitelnou, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje *spočetné* sjednocení B omezených intervalů takové, že $\lambda_d^*(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$. Tedy měřitelné množiny jsou ty, které (zhruba řečeno) mají (ve Fréchet-Nikodymově metrice, viz komentář ke kap. 3) blízko k intervalům. Velmi názorně se jeví charakteristika měřitelnosti množin $A \subset \mathbb{R}^d$ s *konečnou* vnější Lebesgueovou mírou $\lambda_d^*(A)$: jsou to právě takové množiny, které lze libovolně přesně aproximovat *konečným* sjednocením intervalů. Podroběji: *A je měřitelná, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečné sjednocení B omezených intervalů takové, že $\lambda_d^*(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$.* Za zmínku stojí porovnání s Jordan-Peanovým objemem, kde také aproximujeme konečným sjednocením intervalů, ale požadujeme inkluzi ($A \subset B$, případně $B \subset A$). U Lebesgueovy teorie jsou dovolena konečná sjednocení intervalů „přesahující A i zasahující do A“. Taková „drobná nuance“ vede k dramatickému zisku obrovského množství měřitelných množin. Dokonce tak velkého, že otázka existence množin, které „neumíme měřit“, závisí na tom, zda jsme či nejsme ochotni připustit určité množinově teoretické axiomy těžkého kalibru. (Přístup k měřitelnosti pomocí aproximace intervaly je podrobně rozebrán např. v [65], s. 24-68; pro případ, kdy intervaly jsou nahrazeny obecnými množinami z jistého systému, viz [10], Vol. 1, s. 17.)

Systém lebesgueovsky měřitelných množin lze zavést topologicky, pomocí vlastnosti regularity: množina $A \subset \mathbb{R}^d$ se prohlásí za měřitelnou, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená množina A' a otevřená A'' takové, že $A' \subset A \subset A''$ a $\lambda_d^*(A''\backslash A') < \varepsilon$; viz např. [99]. (Poznamenejme, že otevřené množině (např. množině $A''\backslash A'$) lze rozumně přiřadit „elementární objem“, neboť každá taková množina je spočetným sjednocením po dvou disjunktních intervalů z $\mathcal{J}^d$; viz [116], s. 65.)

Různé přístupy, které jsme zmínili, vedou ke stejnému systému $\mathcal{L}^d$ měřitelných množin a je věcí vkusu, kterému přístupu dáváme přednost. V pozadí všech konstrukcí je rozšíření elementárního objemu na míru, což je technicky poměrně náročné a vždy je v nějakém okamžiku (třeba i skrytějším způsobem) přítomna topologie $\mathbb{R}^d$. Např. role kompaktnosti je zdůrazněna v [4], Theorem 4.4, či, v obecnějším kontextu, v [10], Vol. 1, Theorem 1.4.3, Example 1.4.5 a v části 1.12(ii) nazvané *Compact classes*.

(b) **Konstrukce na základě vnitřní míry:** Zde se omezíme pro Lebesgueovu míru jen na elementární výklad v textu *Lebesgueova míra* vystaveném na

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/`

a na sofistikovaný výklad v [73], kde je „ideologie" vnitřní míry rozebrána velmi podrobně ve zcela abstraktním kontextu; viz také [74].

(c) **Konstrukce na základě zúplnění:** Měřitelné množiny lze v zásadě získat jako limity konečných sjednocení intervalů ve Fréchet-Nikodymově metrice. *V zásadě* zde znamená technicky se vyrovnat s množinami nekonečné vnější Lebesgueovy míry. Tento postup je rozpracován v [117], kap. 11, a v obecném kontextu v [10], Vol. 1, kap. 1.5.

(d) **Konstrukce míry na základě integrálu:** Zde budeme postupovat neformálně a samozřejmě bez nároků na úplnost. Naše dosavadní znalosti o Lebesgueově míře mají silně teoretický přídech. Stručně řečeno, neposkytují ani cestu ke vzorečku πr^2 pro obsah kruhu. Teorie míry se teprve ve spojení s *pojmem integrálu* stává mocným nástrojem pro teorii i pro praktické počítání.

Pro motivaci připomeňme tuto elementární situaci. Zvolme $a < b$ a uvažujme systém $\mathcal{S}$ podmnožin $A \subset [a, b]$, jejichž charakteristická funkce χ_A je riemannovsky integrovatelná. (Potom $\mathcal{S}$ je jistě algebra množin na $[a, b]$.) Definujme

$$\kappa(A) := (R)\int_a^b \chi_A, \qquad A \in \mathcal{S}.$$

Potom je funkce κ zřejmě konečně aditivní na $\mathcal{S}$ (ve skutečnosti je κ přesně Jordanův-Peanův jednorozměrný objem). Zde se aditivita Riemannova integrálu „přeloží" do aditivity κ.

Představme si, že na množině X máme vektorový prostor reálných funkcí $\mathcal{F}$ a na něm definovaný nezáporný lineární funkcionál Φ. Potom pro $\mathcal{S} := \{A \subset X : \chi_A \in \mathcal{F}\}$ definuje rovnost

$$\mu(A) = \Phi(\chi_A), \qquad A \in \mathcal{S}, \tag{15.6}$$

nezápornou aditivní množinovou funkci na $\mathcal{S}$. (Linearita dává aditivitu.)

Nechť X, $\mathcal{F}$, Φ mají tuto dodatečnou vlastnost (L): jestliže $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesající posloupnost nezáporných funkcí z $\mathcal{F}$ taková, že $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{F}$, potom je

$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$ (tedy jakási „spojitost zdola“). Potom množinová funkce μ z (15.6) je σ-aditivní v tomto smyslu: je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, pak $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. (K tomu stačí zvolit $f_n := \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}$.) Tedy vlastnost (L) „zodpovídá“ za σ-aditivitu míry odvozené z „abstraktního integrálu“, zde zastoupeného funkcionálem Φ. Velice zhruba řečeno: umím-li vybudovat „integrál s vlastností (L)“, samozřejmě bez pojmu míry, mohu přes charakteristické funkce definovat míru. (Z teorie abstraktního Lebesgueova integrálu definovaného na prostoru s mírou víme, že σ-aditivita míry je klíčem k důkazu vlastnosti (L), což je tzv. *Leviho věta*, odtud písmeno „L“.)

Tento výklad, i když matematicky nedostatečně přesný, snad dostatečně naznačuje, v jakém smyslu jdou míra a integrál ruku v ruce. Můžeme vyjít od míry a vybudovat integrál. Můžeme ale také vyjít od integrálu (vybudovaného *nějak* bez pojmu míry) a dostat míru. Druhá cesta je v literatuře bohatě rozpracována a souvisí s pojmy *Daniellův integrál, Radonův integrál* apod.; viz např. [88], kap. 14 a [102]. Poznamenejme, že se na MFF UK Lebesgueův integrál vyučoval (zejména v šedesátých a sedmdesátých letech) právě „daniellovským přístupem“, tedy metodou rozšiřování elementárního integrálu ze základního prostoru na systém integrovatelných funkcí; viz [23].

Není bez zajímavosti zmínit „hybridní přístup“, třeba to naznačíme na příkladu jednorozměrného integrálu. Nevyjde se ze znalosti existence Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}$, ale jen ze znalosti *množin Lebesgueovy míry* 0 (snadný pojem). Pak nezáporné integrovatelné funkce se *definují* na základě po částech konstantních funkcí (jak jednoduché!), pro něž je integrál definován přirozeným způsobem: za nezápornou integrovatelnou funkci se prohlásí každá funkce f s touto vlastností: existuje neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných po částech konstantních funkcí taková, že $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ pro *skoro všechna* $x \in \mathbb{R}$ (tedy pro všechna x s výjimkou bodů z množiny Lebesgueovy míry nula) a posloupnost $\big\{ \int_{\mathbb{R}} s_n \big\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak se definuje $\int_{\mathbb{R}} f := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n$. To je velmi elegantní a velmi stravitelný způsob zavedení integrálu, ale zbývá vykonat nezanedbatelnou práci: dokázat, že $\int_{\mathbb{R}} f$ je *dobře* definován (nezávislost na bližší volbě posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$) a dokázat vlastnost (L). Pak je jednorozměrná míra (definovaná již pomocí integrálu z charakteristické funkce) na světě. Pro jaké množiny? V této teorii pro ty, jejichž charakteristická funkce je měřitelná, tedy je bodovou limitou skoro všude po částech konstantních funkcí; podrobnosti viz např. [114], kap. II, [30].

Zdůrazněme skutečnost, že věta 12.3 potvrzuje *prominentní postavení Lebesgueovy míry* jako jediné rozumné *geometrické* (d-rozměrné) *míry* (viz též věta 13.1).

Řekněme si ještě několik slov k *optimalitě* systému lebesgueovsky měřitelných množin. Systém $\mathcal{L}^d$:

- obsahuje všechny omezené intervaly;
- obsahuje všechny zanedbatelné množiny (vzhledem k λ_d);

- sestává z množin, které jsou dobře topologicky aproximovatelné „jednoduchými" množinami (vlastnost regularity Radonových měr – viz věta 6.1);
- vnější míra se na tomto systému chová σ-aditivně.

Nechť $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ je množinový systém obsahující $\emptyset$, který je uzavřený vzhledem ke sjednocení a rozdílu množin. (Víme, že takovému množinovému systému se říká **okruh**.)

Předpokládejme, že všechny omezené intervaly jsou prvky $\mathcal{R}$ a že λ_d^* je na $\mathcal{R}$ aditivní.

Je-li I omezený interval a $A \subset \mathbb{R}$, pak $I \cap A\,\big(= I\backslash(I\backslash A)\big) \in \mathcal{R}$ a $I \cap A^c\,(= I\backslash A) \in \mathcal{R}$, tedy

$$\lambda_d^*(I) = \lambda_d^*(I \cap A) + \lambda_d^*(I \cap A^c).$$

Odtud plyne (srv. např. [39], s. 31), že $A \in \mathcal{L}^d$. Vidíme, že $\mathcal{L}^d$ je *největší* okruh v $\mathbb{R}^d$ obsahující omezené intervaly, na němž se λ_d^* chová aditivně.

Tím však není řečeno, že se λ_d nedá rozšířit na míru na *větší* σ-algebře. Platí toto tvrzení: *je-li $B \notin \mathcal{L}^d$, pak λ_d lze rozšířit na míru na $\sigma\big(\mathcal{L}^d \cup \{B\}\big)$*. (Tedy žádné maximální σ-aditivní rozšíření Lebesgueovy míry neexistuje.) Je známo, že dokonce existuje rozšíření na míru, která je invariantní vůči izometrickým zobrazením a je definována na σ-algebře obsahující $\mathcal{L}^d$ jako vlastní část. Přirozená otázka (z 30. let dvacátého století): existuje *maximální* spočetně aditivní rozšíření Lebesgueovy míry, které je invariantní vůči všem izometriím? Na negativní odpověď se muselo počkat půl století. Delikátní otázky tohoto typu jsou diskutovány v [10], odst. 1.12(v) a 1.12(xi); viz také [17], [27], [28], [37], [67], [94], [134].

O konečně aditivních rozšířeních Lebesgueovy míry uvedeme několik poznámek v komentáři ke kapitole 13.

13. Invariantní míry na $\mathbb{R}^d$: Lebesgueova míra je jediná míra invariantní vůči posunutí, která „správně měří intervaly" (věta 13.1). Ve skutečnosti je invariatní dokonce vůči všem izometrickým zobrazením v $\mathbb{R}^d$ (věta 14.3). V souvislosti s větou 14.3 za zmínku stojí tento postřeh: již víme, že Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^d$ je invariantní vůči posunutí; pokud víme, že pro každou množinu $A \in \mathcal{L}^d$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\lambda_d(\alpha \cdot A) = |\alpha|^d \lambda_d(A)$, potom λ_d je invariantní vůči *všem izometrickým zobrazením v* $\mathbb{R}^d$. Plyne to z výsledku, který je sám v sobě zajímavý, viz [10], Vol. 1, Theorem 1.7.4:

Nechť A je neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}^d$. Potom existuje posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ po dvou disjunktních otevřených koulí obsažených v A taková, že $\lambda_d\big(A\backslash \bigcup_{n=1}^\infty U_n\big) = 0$.

Dalekosáhlé zobecnění situace z $\mathbb{R}^d$ poskytuje věta o existenci a jednoznačnosti tzv. **Haarovy míry**, tj. netriviální invariantní míry na libovolné lokálně kompaktní abelovské grupě; viz [88], kap. 19 a dále [107] a [120].

O rozšíření Lebesgueovy míry na invariantní míru definovanou na větší σ-algebře než $\mathcal{L}^d$ jsme mluvili na konci komentáře ke kap. 12.

Již víme, že neexistuje invariantní míra rozšiřující Lebesgueovu míru na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Skromnější požadavek je předmětem formulace následujícího problému, kterému se říká **problém objemu**, což je otázka existence funkce $\kappa:\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ s těmito třemi vlastnostmi:

- κ je konečně aditivní;
- κ je invariantní vůči izometrickým zobrazením $\mathbb{R}^d$;
- $\kappa\big([0,1]^d\big) = 1$.

V roce 1914 ukázal F. Hausdorff [57], že problém objemu je neřešitelný v $\mathbb{R}^d$ pro $d \geq 3$. Na druhé straně S. Banach v roce 1923 dokázal (viz [2]), že problém objemu je řešitelný pro případ $d = 1$ a $d = 2$, ale ne jednoznačně. Různá odpověď pro $d = 1, 2$ a pro vyšší dimenze spočívá v podstatné strukturální odlišnosti grup izometrií.

Neřešitelnost problému objemu je dramatickým způsobem vyjádřena v následujícím Banachova-Tarskiho paradoxu z [3]: *Nechť* $d \geq 3$ *a nechť* A, B *jsou* (libovolné!) *omezené množiny s neprázdným vnitřkem v* $\mathbb{R}^d$*. Potom existují rozklad* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *množiny* A *(tj.* A_j *jsou po dvou disjunktní a* $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$*) a taková izometrická zobrazení* $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \dots, n\}$*, že* $\{f_1(A_1), \dots, f_n(A_n)\}$ *je rozklad množiny* B.

Toto tvrzení z roku 1924 bývá považováno za nejvíce paradoxní matematické tvrzení (populární texty: *kuličku velikosti hrášku můžete rozbít na konečně kousků a* (*euklidovským*) *přemístěním v prostoru z nich složit kouli o velikosti Slunce;* není třeba zdůrazňovat, že zmíněná existence rozkladu nemá vůbec nic společného s reálným světem). Prvky rozkladu jsou nepředstavitelně složité, nejsou nikterak „sestrojeny“, jejich *existence* je důsledkem axiomu výběru, tedy zcela nekonstruktivního nástroje abstraktní teorie množin. Jako kuriozitu uveďme, že pokud A je koule a B je sjednocení dvou disjunktních koulí stejného poloměru, potom 5 kusů (tj. $n = 5$) stačí, ale 4 nestačí.

Na téma paradoxních rozkladů existuje rozsáhlá literatura; zmíníme jen knihy [129], [130], odkazy v [10], Vol. 1, kap. 1.12(xi) a články [17], [18], [27], [32], [50], [53], [56], [69], [78] - [80], [119], [120], [126].

14. Transformace Lebesgueovy míry při lineárních zobrazeních: K diskusi před větou 14.3 připomeňme, že každé izometrické zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pro něž $T(0) = 0$, je *lineární*, jeho matice je ortonormální a tudíž $|\det T| = 1$; viz [64], kap. VI, nebo [4], s. 41–42.

Věta 14.3: Pro lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ má $|\det T|$ tuto geometrickou interpretaci: $|\det T|$ je *objem rovnoběžnostěnu* $T\big([0,1]^d\big)$.

Větu 14.3 je užitečné zasadit do kontextu tvrzení o *obrazu míry*.

Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(X', \mathcal{A}')$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to X'$ se nazývá $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-měřitelné, jestliže $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ pro každou množinu $A' \in \mathcal{A}'$. Je-li μ míra na $\mathcal{A}$, pak zobrazení $A' \mapsto \mu\big(f^{-1}(A')\big)$, $A' \in \mathcal{A}'$, definuje míru na $\mathcal{A}'$ (tzv. **obraz míry** μ **při zobrazení** f; označení: $f(\mu)$ nebo $f_{\#}\mu$).

Je-li $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ prosté lineární zobrazení, pak T je $(\mathcal{L}^d - \mathcal{L}^d)$-měřitelné a podle věty 14.3 platí

$$T(\lambda_d)(A) = \lambda_d\big(T^{-1}(A)\big) = |\det T^{-1}|\lambda_d(A) = \big(1/|\det T|\big)\lambda_d(A), \qquad A \in \mathcal{L}^d.$$

Protože každé difeomorfní zobrazení φ je (*v infinitesimálním smyslu*) lokálně lineární, nepřekvapí nás, že ve větě o substituci pro vícerozměrný Lebesgueův integrál se jako *dilatační* faktor vyskytuje absolutní hodnota jakobiánu, tedy $|\det \varphi'|$.

Na závěr se zmíníme o obrazu Lebesgueovy míry λ_d při homeomorfním zobrazení f prostoru $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^d$. Je-li $\mu := f(\lambda_d)$, pak zřejmě μ má tyto vlastnosti:

(a) $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$;

(b) $\mu(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$;

(c) $\mu(G) > 0$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^d$;

(d) $\mu(\mathbb{R}^d) = \infty$.

Pozoruhodnou větu dokázali J. C. Oxtoby a S. Ulam v roce 1914 [100]: Je-li $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu)$ prostor s mírou μ splňující podmínky (a)-(d), potom existuje homeomorfismus $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ takový, že $\mu = f(\lambda_d)$. Jednodušší důkaz lze nalézt v [54].

Kapitola 16

Významné osobnosti klasické teorie míry a integrálu

Stefan **Banach** (1892 – 1945)

Émile **Borel** (1871 – 1956)

Constantin **Carathéodory** (1873 – 1950)

Perey John **Daniell** (1889 – 1946)

Pierre **Fatou** (1878 – 1929)

Guido **Fubini** (1879 – 1943)

Hans **Hahn** (1879 – 1934)

Felix **Hausdorff** (1868 – 1942)

Andrej Nikolajevič **Kolmogorov** (1903 – 1987)

Charles **de la Vallée Poussin** (1866 – 1962)

Henri **Lebesgue** (1875 – 1941)

Beppo **Levi** (1875 – 1961)

Nikolaj Nikolajevič **Luzin** (1883 – 1950)

Otto **Nikodym** (1888 – 1974)

Guiseppe **Peano** (1858 – 1932)

Johann **Radon** (1887 – 1956)

Frigyes **Riesz** (1880 – 1956)

Waclaw **Sierpiński** (1882 – 1969)

Guiseppe **Vitali** (1875 – 1932)

William Henry **Young** (1863 – 1942)

Literatura

[1] Aleksandrov, P. S.: *Úvod do obecné theorie množin a funkcí.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1954.

[2] Banach, S.: *Sur le problème de la mesure.* Fund. Math. **4** (1923), 7–23.

[3] Banach, S., Tarski, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. Math. **6** (1924), 244–277.

[4] Bauer, H.: *Measure and integration theory.* Walter de Gruyter, Berlin, 2001.

[5] Bauer, H.: *Probability theory.* Walter de Gruyter, Berlin, 1996.

[6] Bečvářová, M., Netuka, I.: *Jarník's notes of the lecture course Punktmengen und reele Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen, 1928).* Matfyzpress, Prague, 2010.

[7] Benedetto, J. J.: *Real variable and integration.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[8] Bernstein, F.: *Zur Theorie der trigonometrischen Reihe.* Leipz. Ber. **60** (1908), 325–338.

[9] Boardman, E.: *On extensions of the Steinhaus theorem for distance sets and difference sets.* J. London Math. Soc. **5** (1972), 729–739.

[10] Bogachev, V. I.: *Measure theory, Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[11] Borel, E.: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[12] Borel, E.: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **12** (1895), 9–95.

[13] Bourbaki, N.: *Elements of the history of mathematics.* Springer, Berlin, 1999.

[14] Bourbaki, N.: *Intégration.* Ch. I-IV, V, VI, VII-VIII, IX. Hermann et Cie, Paris, 1952, 1956, 1959, 1963, 1969. (English transl. of Ch. I-VI: Springer, 2004).

[15] Browne, B. H.: *A measure on the real line constructed from an arbitrary point function.* Proc. London Math. Soc. **27** (1973), 1–21.

[16] Bruckner, A. M.: *A note on measures determined by continuous functions.* Canad. Math. Bull. **15** (1972), 289–291.

[17] Bruckner, A. M., Ceder, J.: *On improving Lebesgue measure.* Nordisk Mat. Tidskr. **23** (1975), 59–68.

[18] Brylenskaya, L. I.: *The history of the problem of measure in the first half of the twentieth century* (in Russian). Istor.-Mat. Issled. **30** (1986), 97–112.

[19] Cantor, G.: *Über unendliche lineare Punktmannichfaltingkeiten. Part 5.* Math. Ann. **21** (1883), 545–591.

[20] Carathéodory, C.: *Über das lineare Maß von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1914, 404–426.

[21] Carathéodory, C.: *Gesammelte mathematische Schriften, Band IV.* C.H. Beck, München, 1956.

[22] Čech, E.: *Bodové množiny. Část první.* Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1936.

[23] Černý, I., Mařík, J.: *Integrální počet I.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1960.

[24] Chatterji, S. D.: *Measure theory and probability theory.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **46** (1988), 151–169.

[25] Choquet, G.: *Borel, Baire, Lebesgue.* In: Autour du centenaire Lebesgue, Panor. Synthèses 18, Soc. Math. France, Paris, 2004, 23–37.

[26] Choquet, G., De Pauw, T., de la Harpe, P., Kahane, J.-P., Pajot, H., Sévennec, B.: *Autour du centenaire Lebesgue.* Panoramas et Synthèses 18, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[27] Ciesielski, K.: *How good is Lebesgue measure?* Math. Intelligencer **11** (1989), 54–58.

[28] Ciesielski, K.: *Isometrically invariant extensions of Lebesgue measure.* Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 799–801.

[29] Cohen, L. W.: *Measure and integration in the manner of Borel.* Scripta Math. **29** (1973), 417–435.

[30] Daele, A. V.: *The teaching of mathematics: the Lebesgue integral without measure theory.* Amer. Math. Monthly **97** (1990), 912–915.

[31] van Dalen, D., Monna A. F.: *Sets and integration: an outline of the development.* Wolters – Hoordhoff, Groningen, 1972.

[32] Deuber, W. A.: *„Paradoxe“ Zerlegung Euklidischer Räume.* Elem. Math. **48** (1993), 61–75.

[33] Dieudonné, J.: *Intégration et mesure.* In: Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900. Hermann, Paris, 1978, 267–276.

[34] Dynkin, E. B.: *Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1961.

[35] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* 3. erweiterte Aufl., Springer, Berlin, 2002.

[36] Evans, C., Gariepy, R. F.: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, Boca Raton – London, 1992.

[37] Fickett, J., Mycielski, J.: *A problem of invariance for Lebesgue measure.* Colloq. Math. **24** (1979), 123–125.

[38] Fleron, J. F.: *A note on the history of the Cantor set and Cantor function.* Math. Mag. **67** (1994), 136–140.

[39] Folland, G. B.: *Real analysis: modern techniques and their applications.* Wiley-Interscience Publication, New York, 1984.

[40] Fréchet, M.: *Définition de l'intégrale sur un ensemble abstrait.* C. R. Acad. Sci. Paris **161** (1915), 839–840.

[41] Fréchet, M.: *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue a un ensemble abstrait.* Bull. Sci. Math. France **43** (1915), 249–265.

[42] Fréchet, M.: *Sur la famille complète dérivée de la famille des ensembles bien définis.* C. R. Acad. Sci. Paris **170** (1920), 563–564.

[43] Fréchet, M.: *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable.* Bull. Calcutta Math. Soc. **11** (1921), 187–206.

[44] Fréchet, M.: *Familles additives et fonctions additives d'ensembles abstraits.* Enseignement Math. **22** (1922), 113–129.

[45] Fréchet, M.: *Sur la distance de deux ensembles.* C. R. Acad. Sci. Paris **176** (1923), 1123–1124.

[46] Fréchet, M.: *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits.* Fund. Math. **4** (1923), 329–365.

[47] Fréchet, M.: *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits. Suite.* Fund. Math. **5** (1924), 206–251.

[48] Fréchet, M.: *Sur la distance de deux ensembles, Vol. 1–8.* Bull. Calcutta Math. Soc. **15** (1924).

[49] Fremlin, D.: *Measure theory, Vol. 1–5.* University of Essex, Colchester, 2000–2003.

[50] French, R.: *The Banach-Tarski theorem.* Math. Intelligencer **10** (1988), 21–28.

[51] Fuchs, E., Netuka, I.: *Johann Radon (K stému výročí narození).* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. **33** (1988), 282–285.

[52] Gardner, R. J., Pfeffer, W. F.: *Borel measures.* In: Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 961–1043.

[53] Gardner, R. J., Wagon, S.: *At long last, the circle has been squared.* Notices Amer. Math. Soc. **36** (1989), 1338–1343.

[54] Goffman, C., Pedrick, G.: *A proof of the homeomorphism of Lebesgue-Stieltjes measure with Lebesgue measure.* Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 196–198.

[55] Hahn, H.: *Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen.* Annali Scuola Norm. Super. Pisa (2) **2** (1933), 429–452.

[56] de la Harpe, P.: *Mesures finiment additives et paradoxes.* In: Autour du centenaire Lebesgue, Panor. Synthèses 18, Soc. Math. France, Paris, 2004, 39–61.

[57] Hausdorff, F.: *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.* Math. Ann. **75** (1914), 428–433.

[58] Hausdorff, F.: *Dimension und äusseres Mass.* Math. Ann. **79** (1919), 157-179.

[59] Hausdorff, F.: *Gesammelte Werke, Vol. I–VIII.* Springer, Berlin, 2001–2005.

[60] Hawkins, T.: *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development.* University of Wisconsin Press, Madison – London, 1970.

[61] Hawkins, T.: *The origins of modern theories of integration. From the calculus to set theory 1630–1910.* Princeton Paperbacks, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 149–180.

[62] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Springer-Verlag, New York – Berlin, 1969.

[63] Hoare, G. T. Q., Lord, N. J.: *'Intégrale, longueur, aire', the centenary of the Lebesgue integral.* Math. Gazette **86** (2002), 3–27.

[64] Jarník, V.: *Diferenciální počet II.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956.

[65] Jarník, V.: *Integrální počet II.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1955.

[66] Kahane, J.-P.: *L'intégrale de Lebesgue au cours du vingtième siècle.* In: Autour du centenaire Lebesgue, Panor. Synthèses 18, Soc. Math. France, Paris, 2004, 1–22.

[67] Kakutani, S., Oxtoby, J. C.: *Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space.* Ann. of Math. (2) **52** (1950), 580–590.

[68] Kechris, A. S.: *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[69] Kirsch, A.: *Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es „verstehen"?* Math. Semesterber. **37** (1990), 216–239.

[70] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[71] Kolmogoroff, A.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Springer, Berlin, 1933.

[72] König, H.: *The transporter theorem – a new version of the Dynkin class theorem.* Arch. Math. (Basel) **57** (1991), 588–596.

[73] König, H.: *Measure and integration. An advanced course in basic procedures and applications.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[74] König, H.: *Measure and integral: new foundations after one hundred years.* In: Functional analysis and evolution equations, Birkhäuser, Basel, 2008, 405–422.

[75] Král, J., Mařík, J.: *Integrace podle Hausdorffovy míry na hladké ploše.* Časopis Pěst. Mat. **89** (1964), 433–448.

[76] Kuczma, M. E., Kuczma, M.: *An elementary proof and an extension of a theorem of Steinhaus.* Glasnik Mat. Ser. **6**(26) (1971), 11–18.

[77] Kupka, J.: *Measure theory: the heart of the matter.* Math. Intelligencer **8** (1986), 47–56.

[78] Laczkovich, M.: *Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes.* Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **23** (1991), 145–176.

[79] Laczkovich, M.: *Paradoxical decompositions: a survey of recent results.* In: First European Congress of Mathematics, Vol. II, Paris, Birkhäuser, Basel, 1992, 159–184.

[80] Laczkovich, M.: *Paradoxes in measure theory.* In: Handbook of measure theory, North-Holland, Amsterdam, 2002, 83–123.

[81] Lebesgue, H.: *Sur une généralisation de l'intégrale définie.* C. R. Acad. Sci. Paris **132** (1901), 1025–1028.

[82] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire.* Ann. Mat. Pura Appl. (3) **7** (1902), 231–359.

[83] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris, Gauthier-Villars, 1904; 2e éd., Paris, 1928.

[84] Lebesgue, H.: *Sur les fonctions représentables analytiquement.* J. Math. Pures Appl. (6) **1** (1905), 139–216.

[85] Lebesgue, H.: *Sur l'intégration des fonctions discontinues.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **27** (1910), 361–450.

[86] Lebesgue, H.: *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **35** (1918), 191–250.

[87] Lukeš, J.: *Teorie míry a integrálu I.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[88] Lukeš, J., Malý, J.: *Measure and integral.* Matfyzpress, Prague, 1995.

[89] Medvedev, F. A.: *Development of the concept of the integral* (in Russian). Nauka, Moscow, 1974.

[90] Medvedev, F. A.: *Scenes from the history of real functions.* Translated from the Russian. Birkhäuser, Basel, 1991.

[91] Medvedev, F. A.: *The French school of the theory of functions and sets on the border of the XIX-XX centuries* (in Russian). Nauka, Moscow, 1976.

[92] Michel, A.: *Constitution de la théorie moderne de l'intégration.* Mathesis. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1992.

[93] Mospan, Y. V.: *A converse to a theorem of Steinhaus.* Real Anal. Exchange **31** (2005/06), 291–294.

[94] Mycielski, J.: *Two constructions of Lebesgue's measure.* Amer. Math. Monthly **85** (1978), 257–259.

[95] Netuka, I., Veselý, J.: *Henri Lebesgue (K stému výročí narození).* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. **20** (1975), 301–307.

[96] Netuka, I., Veselý, J.: *Bernhard Riemann (Ke stopadesátému výročí narození).* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. **21** (1976), 143–149.

[97] Netuka, I., Veselý, J.: *F. Riesz a matematika dvacátého století.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. **25** (1980), 128–138.

[98] Nikodym, O.: *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon.* Fund. Math. **15** (1930), 131–179.

[99] Oxtoby, J. C.: *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer-Verlag, New York – Berlin, 1971.

[100] Oxtoby, J. C., Ulam, S. M.: *Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity.* Ann. of Math. (2) **42** (1941), 874–920.

[101] Pesin, I. N.: *Classical and modern integration theories.* Translated from the Russian. Academic Press, New York – London, 1970.

[102] Pfeffer, W. F.: *Integrals and measures.* Marcel Dekker, Inc., New York – Basel, 1977.

[103] Pier, J.-P.: *Carathéodory's fundamental contribution to measure theory, I, II.* In: Constantin Carathéodory: an international tribute, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991, 1120–1145.

[104] Pier, J.-P.: *Intégration et mesure 1900–1950.* In: Development of mathematics 1900–1950. Ed. by J.-P. Pier. Birkhäuser, Boston – Basel, 1994, 517–564.

[105] Pier, J.-P.: *Historique de la notion de compacité.* Historia Math. **7** (1980), 425–443.

[106] Pier, J.-P.: *Histoire de l'intégration.* Vingt-cinq siècles de mathématiques. Culture Scientifique, Masson, Paris, 1996.

[107] Pier, J.-P.: *Mesures invariantes — de Lebesgue à nos jours.* Historia Math. **13** (1986), 229–240.

[108] Pták, V.: *A combinatorial lemma on the existence of convex means and its application to weak compactness.* In: Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, VII, 1963, 437–450.

[109] Rademacher, H.: *Über eine Eigenschaft von meßbaren Mengen positiven Maßes.* Jahr. Deutsch. Math. Verein. **30** (1921), 130–132.

[110] Radon, J.: *Gesammelte Abhandlungen. Band 1.* Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Vienna; Birkhäuser, Basel – Boston, 1987.

[111] Radon, J.: *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen.* Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa **122** (1913), 1295–1438.

[112] Riesz, F.: *L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **1** (1949), 29–42.

[113] Riesz, F.: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris **149** (1909), 974–977.

[114] Riesz, F., Sz.-Nagy, B.: *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952; English transl.: Functional analysis. Dover, New York, 1990.

[115] Rogers, C. A.: *A linear Borel set whose difference set is not a Borel set.* Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 41–42.

[116] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Translated from the third English edition by Ivan Netuka and Jiří Veselý. Academia, Prague, 2003.

[117] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis.* 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[118] Saks, S.: *Théorie de l'intégrale.* Warszawa, 1937.

[119] Schreiber, P.: *Felix Hausdorffs paradoxe Kugelzerlegung im Kontext der Entwicklung von Mengenlehre, Maßtheorie und Grundlagen der Mathematik.* In: Felix Hausdorff zum Gedächtnis, Band I, Vieweg, Braunschweig, 1996, 135–148.

[120] Sévennec, B.: *Mesure invariante et équirépartition dans les groupes compacts.* In: Autour du centenaire Lebesgue, Panor. Synthèses 18, Soc. Math. France, Paris, 2004, 63–84.

[121] Sierpiński, W.: *Un théorème général sur les familles des ensembles.* Fund. Math. **12** (1928), 206–210.

[122] Smith, H. J. S.: *On the integration of discontinuous functions.* Proc. London Math. Soc. **6** (1875), 140–153.

[123] Solovay, R.: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* Ann. Math. **92** (1970), 1–56.

[124] Steinhaus, H.: *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive.* Fund. Math. **1** (1920), 93–104.

[125] Stieltjes, T. J.: *Recherches sur les fractions continues.* Ann. Fac. Sci. Toulouse (1) **8** (1894), J.1–J.122.

[126] Stromberg, K.: *The Banach-Tarski paradox.* Amer. Math. Monthly **86** (1979), 151–161.

[127] Stroock, D. W.: *A concise introduction to the theory of integration.* 2nd ed., Birkhäuser, Boston, 1999.

[128] Vitali, G.: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* Bologna, Tipogr. Gamberini e Parmeggiani. 1905.

[129] Wagon, S.: *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[130] Wapner, L. M.: *The Pea and The Sun – A Mathematical Paradox.* A. K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2005.

[131] Ważewski, T.: *Sur les ensembles mesurables.* C. R. Acad. Sci. Paris **176** (1923), 69–70.

[132] Young, W. H.: *Open sets and the theory of content.* Proc. London Math. Soc. **2** (1905), 16–51.

[133] Zajíček, L.: *An elementary proof of the one-dimensional density theorem.* Amer. Math. Monthly **86** (1979), 297–298.

[134] Zakrzewski, P.: *Extensions of isometrically invariant measures on Euclidean spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 325–331.