Obsah

Kapitola 1

Harmonické funkce

1.1 Příklady harmonických funkcí

Klasická teorie potenciálu v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^m$ je těsně spjata s *Laplaceovým operátorem*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} D_j^2$$

definovaným jako součet nesmíšených druhých parciálních derivací.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h : U \to \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce h je *harmonická* na U, jestliže $h \in \mathcal{C}^2(U)$ a splňuje na U *Laplaceovu rovnici* $\Delta h = 0$.

Vektorový prostor všech harmonických funkcí na U budeme značit $\mathcal{H}(U)$ a konvexní kužel všech nezáporných harmonických funkcí na U označíme $\mathcal{H}^+(U)$.

1.1.1. Příklady.

(a) Afinní funkce v $\mathbb{R}^m$ jsou harmonické.

(b) Je-li $U \subset \mathbb{R}$ interval, pak $h \in \mathcal{H}(U)$, právě když je h afinní na U.

(c) Komplexní rovinu $\mathbb{C}$ budeme obvyklým způsobem ztotožňovat s $\mathbb{R}^2$. Uvažujme holomorfní funkci f na otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$. Označme $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Potom $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ a z Cauchy-Riemannových podmínek $D_1 u - D_2 v = 0$, $D_2 u + D_1 v = 0$ derivováním dostáváme $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Tedy reálná a imaginární část holomorfní funkce jsou harmonické funkce.

(d) Nechť $H \in \mathcal{C}^2(\,]0,\infty[\,)$, $R(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$ (norma v $\mathbb{R}^m$) a pro $x = (x_1, ..., x_m)$, $j \in \{1, ..., m\}$ nechť je $\pi_j(x) = x_j$. Pro j-tou parciální derivaci funkce $h = H \circ R$ platí na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ rovnosti

$$D_j h = (H' \circ R) \cdot D_j R = (H' \circ R) \cdot \pi_j / R,$$

$$D_j(\pi_j / R) = 1/R + (-\pi_j / R^2) \cdot D_j R = 1/R - \pi_j^2 / R^3,$$

takže

$$D_j^2 h = (H'' \circ R) \cdot \pi_j^2 / R^2 + (H' \circ R)(1/R - \pi_j^2 / R^3).$$

Odtud

$$\Delta h = \sum_{j=1}^{m} D_j^2 h = (H'' \circ R) + (H' \circ R)(m/R - 1/R) = (H'' \circ R) + ((m-1)/R)(H' \circ R).$$

Vidíme, že funkce h je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, právě když

$$H''(t) + ((m-1)/t)H'(t) = 0, \qquad t \in]0, \infty[.$$

Tedy $h = H \circ R$ je pro $m > 1$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, právě když existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$H(t) = \begin{cases} \alpha t^{2-m} + \beta & \text{v případě } m > 2, \\ \\ \alpha \log t + \beta & \text{v případě } m = 2. \end{cases}$$

(e) Nechť $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $r = |y|$ a nechť

$$h : x \longmapsto \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^m}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\}.$$

Potom $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m \setminus \{y\})$. Tvrzení lze ověřit přímým výpočtem, lze však postupovat i např. takto:

Případ $m > 2$: Pro $x \in \mathbb{R}^m$ platí

$$Q(x) = r^2 - |x|^2 + |x - y|^2 = 2y \cdot (y - x),$$

takže $Q(x)/|x - y|^m$ je (až na násobek) derivace ve směru y harmonické funkce

$$x \mapsto \frac{1}{|x - y|^{m-2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

a proto je harmonická. Protože

$$h(x) = \frac{Q(x)}{|x - y|^m} - \frac{1}{|x - y|^{m-2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

je h rozdílem dvou harmonických funkcí, takže $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m \setminus \{y\})$.

Případ $m = 2$: Lze využít např. identitu (x, y považujeme za komplexní čísla)

$$\frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^2} = \operatorname{Re} \frac{x + y}{y - x}, \qquad x \neq y.$$

1.1.2. Úmluva. S ohledem na (1.1.1 (b)) se v dalším výkladu omezíme na případ $m > 1$.

1.2 Princip minima

1.2.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $h \in \mathcal{C}^2(U)$, $\Delta h \leq 0$ na U a nechť pro každé $z \in \partial U$ je*

$$\liminf_{x \to z} h(x) \geq 0.$$

Potom $h \geq 0$ na U.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $\Delta h < 0$ na U. Nechť $\inf h(U) < 0$. Potom existuje $a \in U$ tak, že $h(a) = \inf h(U)$. Pro $j \in \{1, ..., m\}$ je funkce

$$\varphi_j : t \longmapsto h(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_m)$$

definovaná v okolí bodu a_j a nabývá v a_j svého minima. Je tedy $\varphi_j''(a_j) \geq 0$, neboli $D_j^2 h(a) \geq 0$. Sečtením dostáváme $\Delta h(a) \geq 0$, což je ve sporu s předpokladem $\Delta h < 0$ na U. Tedy $h \geq 0$ na U, pokud $\Delta h < 0$ na U.

Nechť nyní $\Delta h \le 0$ a $\inf h(U) < 0$. Zvolme $R > 0$, $\delta > 0$ tak, aby $|x| \le R$ pro všechna $x \in U$ a $\inf h(U) + \delta R^2 < 0$. Definujme

$$g(x) = h(x) + \delta(R^2 - |x|^2), \qquad x \in U.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^2(U)$, $\Delta g = \Delta h - 2\delta m < 0$ a $g \ge h$ na U, takže

$$\liminf_{x \to z} g(x) \ge \liminf_{x \to z} h(x) \ge 0,$$

kdykoli $z \in \partial U$. Podle první části důkazu je $g \ge 0$, zatímco z volby δ plyne, že $\inf g(U) < 0$. Tento spor ukazuje, že $h \ge 0$. $\square$

1.3 Poissonův integrál

Pro $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ označme

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x - a| < r\}, \qquad S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x - a| = r\}$$

a $\sigma_{a,r}$ *normalizovanou povrchovou míru* na $S_r(a)$ (takže $\sigma_{a,r}(S_r(a)) = 1$).
Pro $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $x \ne y$, položme

$$P(x, y) = r^{m-2} \frac{r^2 - |x - a|^2}{|x - y|^m}.$$

Dále definujme

$$P_x :\ y \longmapsto P(x, y), \qquad P^y :\ x \longmapsto P(x, y), \qquad x \ne y.$$

Restrikce funkce P na $B_r(a) \times S_r(a)$ se zpravidla nazývá *Poissonovo jádro*.

Pro $\sigma_{a,r}$–integrovatelnou funkci $f : S_r(a) \to \mathbb{R}^*$ definujeme *Poissonův integrál*

$$Hf : B_r(a) \to \mathbb{R}$$

rovností

$$Hf(x) = \int f \cdot P_x \, d\sigma_{a,r}\,, \qquad x \in B_r(a).$$

V případě, že kouli $B_r(a)$ bude vhodné specifikovat, budeme psát $H_{a,r} f$.

1.3.1. Lemma. *Poissonovo jádro má tyto vlastnosti:*

(i) *$P > 0$ na $B_r(a) \times S_r(a)$,*

(ii) *$\int P_x \, d\sigma_{a,r} = 1$ pro všechna $x \in B_r(a)$,*

(iii) *je-li $y \in S_r(a)$, $\varrho > 0$ a $g \in L^1(\sigma_{a,r})$, potom*

$$\int_{S_r(a) \setminus B_\varrho(y)} g \cdot P_x \, d\sigma_{a,r} \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to y,$$

(iv) *pro každé $y \in S_r(a)$ je $P^y \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a))$ a $\Delta P^y = 0$ na $B_r(a)$.*

Důkaz. Tvrzení (i) je zřejmé, (iv) plyne z (1.1.1 (e)). Dokažme nyní (ii). Připomeňme, že

$$H1(x) = \int P_x \, d\sigma_{a,r}, \qquad x \in B_r(a).$$

Zvolme $0 < \varrho < r$ a uvažujme $x', x'' \in S_\varrho(a)$. Existuje izometrické zobrazení $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ takové, že $T(a) = a$ a $x'' = T(x')$. Zřejmě

$$|T(x') - a| = |x' - a|, \qquad |T(x') - T(y)| = |x' - y|,$$

kdykoliv $y \in \mathbb{R}^m$. Protože je míra $\sigma_{a,r}$ invariantní vzhledem k T, dostáváme

$$\begin{aligned} H1(x'') = H1(T(x')) &= r^{m-2} \int \frac{r^2 - |T(x') - a|^2}{|T(x') - y|^m} \, d\sigma_{a,r}(y) = \\ &= r^{m-2} \int \frac{r^2 - |x' - a|^2}{|T(x') - T(y)|^m} \, d\sigma_{a,r}(y) = H1(x'). \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce $H1$ má konstantní hodnotu c_ϱ na $S_\varrho(a)$. Podle (iv) je $H1$ harmonická funkce na $B_\varrho(a)$ (derivování za integračním znamením), takže podle (1.2.1) je $H1 - c_\varrho = 0$ na $B_\varrho(a)$. Speciálně

$$c_\varrho = H1(a) = r^{m-2} \int \frac{r^2}{r^m} \, d\sigma_{a,r} = 1.$$

Pro důkaz (iii) označme

$$c = \sup\{P(x, z);\ x \in B_{\frac{1}{2}\varrho}(y),\ z \in S_r(a) \setminus B_\varrho(y)\}.$$

Zřejmě $c < \infty$ a pro každé $z \in S_r(a) \setminus \{y\}$ je $\lim_{x \to y} P(x, z) = 0$. Nyní (iii) plyne z Lebesgueovy věty. □

1.3.2. Věta. *Nechť $f : S_r(a) \to \mathbb{R}^*$ je $\sigma_{a,r}$–integrovatelná funkce. Potom*

$$Hf \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a)) \cap \mathcal{H}(B_r(a))$$

a pro každé $z \in S_r(a)$ platí

$$\liminf_{y \to z} f(y) \le \liminf_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{y \to z} f(y).$$

Důkaz. Z (1.3.1 (iv)) plyne, že $Hf \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a)) \cap \mathcal{H}(B_r(a))$ (derivování za integračním znamením). Zvolme $z \in S_r(a)$ a dokažme, že

$$\limsup_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{y \to z} f(y)$$

(nerovnost pro lim inf se pak dokáže přechodem k funkci $-f$).

Označme $\gamma = \limsup_{y \to z} f(y)$. Můžeme předpokládat, že $\gamma < \infty$. Zvolme $\lambda \in]\gamma, \infty[$ a $\varrho > 0$ takové, že

$$\sup f(S_r(a) \cap B_\varrho(z)) < \lambda.$$

Definujme $g = f - \lambda$. Protože $g < 0$ na $S_r(a) \cap B_\varrho(z)$, platí

$$Hg(x) \le \int_{S_r(a) \setminus B_\varrho(z)} g \cdot P_x d\,\sigma_{a,r}, \qquad x \in B_r(a).$$

Pravá strana má pro $x \to z$ podle (1.3.1 (iii)) limitu nula. Protože $Hg = Hf - \lambda$, je

$$\limsup_{x \to z} Hf(x) \le \lambda.$$

Odtud plyne nerovnost

$$\limsup_{x \to z} Hf(x) \le \limsup_{y \to z} f(y).$$

$\square$

1.3.3. Korolár. *Nechť $f \in \mathcal{C}(S_r(a))$. Potom existuje právě jedna funkce $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$ taková, že pro každé $z \in S_r(a)$ platí*

$$(*) \qquad \lim_{x \to z} h(x) = f(z).$$

Platí rovnost $h = Hf$.

Důkaz. Definujeme-li $h = Hf$, platí $(*)$ podle (1.3.2). Jednoznačnost plyne z (1.2.1). $\square$

1.3.4. Poznámka. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ (tzv. okrajová podmínka). *Klasická Dirichletova úloha* spočívá v nalezení harmonické funkce h na U, pro níž platí $(*)$. Podle (1.2.1) takové harmonické rozšíření funkce f existuje nejvýše jedno. V teorii potenciálu se U nazývá *regulární množina*, pokud klasická Dirichletova úloha má řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Z (1.3.3) víme, že každá koule je regulární množina a řešení Dirichletovy úlohy je vyjádřeno Poissonovým integrálem. Hodnoty řešení tedy dostaneme jako „vážený průměr“ hodnot okrajové podmínky — hustota je dána Poissonovým jádrem. V našem výkladu Poissonovo jádro „spadlo z nebe“, v (1.9) ukážeme, jak je lze přirozeným způsobem odvodit.

1.3.5. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$, $f = h|_{S_r(a)}$. Pak $h = Hf$ na $B_r(a)$ podle (1.3.3) a $h \in \mathcal{C}^\infty(B_r(a))$ podle (1.3.2). $\square$

1.3.6. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom pro každé $x \in B_r(a)$ platí*

$$h(a)\, r^{m-2} \frac{r - |x-a|}{(r + |x-a|)^{m-1}} \le h(x) \le h(a)\, r^{m-2} \frac{r + |x-a|}{(r - |x-a|)^{m-1}}.$$

Důkaz. Položme $f = h|_{S_r(a)}$. Potom $h = Hf$ na $B_r(a)$. Pro $x \in B_r(a)$ a $y \in S_r(a)$ zřejmě platí

$$r - |x-a| = |y-a| - |x-a| \le |x-y| \le |y-a| + |x-a| = r + |x-a|,$$

takže na $S_r(a)$ jsou splněny nerovnosti (f je nezáporná)

$$f \cdot r^{m-2} \frac{r - |x-a|}{(r + |x-a|)^{m-1}} \le f \cdot P_x \le f \cdot r^{m-2} \frac{r + |x-a|}{(r - |x-a|)^{m-1}}.$$

Protože

$$h(a) = Hf(a) = \int f \cdot P_a \, d\sigma_{a,r} = \int f \, d\sigma_{a,r},$$

dostáváme integrací požadovanou nerovnost. $\square$

1.3.7. Tvrzení. *Nechť $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$, $M = \sup |h|(B_r(a))$ a $j \in \{1, ..., m\}$. Potom platí*

$$|D_j h(a)| \leq \frac{mM}{r}.$$

Důkaz. Zvolme $0 < \varrho < r$. Stačí dokázat, že $|D_j h(a)| \leq mM/\varrho$. Pro Poissonovo jádro P na kouli $B_\varrho(a)$ snadno spočteme, že $|(D_j P^y)(a)| \leq m/\varrho$. Derivováním za integračním znamením dostáváme

$$D_j h(a) = \int h(y)(D_j P^y)(a)\, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Odtud plyne $|D_j h(a)| \leq mM/\varrho$. □

1.4 Nezáporné harmonické funkce na kouli

Označme $M(S_r(a))$ systém všech konečných (nezáporných) borelovských měr na $S_r(a)$. Pro $\mu \in M(S_r(a))$ definujme *Poissonův integrál míry* μ rovností

$$P\mu(x) = \int P_x\, d\mu, \qquad x \in B_r(a).$$

Zřejmě $P\mu \in \mathcal{H}^+(B_r(a))$ (derivování za integračním znamením).

1.4.1. Lemma. *Nechť $\nu \in M(S_r(a))$ a $h = P\nu$. Pro $\eta \in]0,1[$ a $z \in S_r(a)$ položme*

$$h_\eta(z) = h(a + \eta(z - a)).$$

Potom

$$\lim_{\eta \to 1-} \int g \cdot h_\eta\, d\sigma_{a,r} = \int g\, d\nu,$$

kdykoliv $g \in \mathcal{C}(S_r(a))$. Jinak řečeno: míry $h_\eta \sigma_{a,r}$ konvergují slabě k míře ν pro $\eta \to 1-$.

Důkaz. Lze předpokládat, že $a = 0$. Jestliže y, $z \in S_r(0)$ a $\eta \in]0,1[$, je zřejmě

$$|y - \eta z| = |\eta y - z|,$$

takže z definice funkce P (viz (1.3)) vyplývá, že

$$P(\eta z, y) = P(\eta y, z).$$

Nechť $g \in \mathcal{C}(S_r(0))$. Potom

$$\int g \cdot h_\eta\, d\sigma_{0,r} = \int g(z)\Big(\int P(\eta z, y)\, d\nu(y)\Big)\, d\sigma_{0,r}(z) =$$
$$= \int \Big(\int P(\eta y, z) g(z)\, d\sigma_{0,r}(z)\Big)\, d\nu(y) = \int Hg(\eta y)\, d\nu(y).$$

Protože je $g \in \mathcal{C}(S_r(0))$, je podle (1.3.3) $Hg(\eta y) \to g(y)$ stejnoměrně na $S_r(0)$ pro $\eta \to 1-$. Odtud vyplývá tvrzení lemmatu. □

1.4.2. Věta. *Nechť $h \in \mathcal{H}^+(B_r(a))$. Potom existuje právě jedna míra $\mu \in M(S_r(a))$ tak, že $h = P\mu$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro $\eta \in]0,1[$ a $z \in S_r(0)$ položme $f_\eta(z) = h(\eta z)$. Potom

$$\int_{S_r(0)} f_\eta \, d\sigma_{0,r} = \int_{S_{\eta r}(0)} h \, d\sigma_{0,\eta r} = h(0).$$

Vidíme, že pro míry $\mu_\eta = f_\eta \, d\sigma_{0,r}$ platí $\mu_\eta(S_r(0)) = h(0)$ pro každé $\eta \in]0,1[$. Existují tedy $\eta(n) \in]0,1[$ tak, že $\eta(n) \to 1$ a míra $\mu \in M(S_r(0))$ tak, že $\mu_{\eta(n)} \to \mu$ slabě pro $n \to \infty$. Zvolme $x \in B_r(0)$ a $n \in \mathbb{N}$. Funkce $h_n : t \mapsto h(\eta(n)t)$ je harmonická na $B_{r/\eta(n)}(0) \supset \overline{B_r(0)}$. Podle (1.3.3) je

$$h_n(x) = \int h_n P_x \, d\sigma_{0,r} = \int h(\eta(n)z) P_x(z) \, d\sigma_{0,r}(z) = \int P_x f_{\eta(n)} \, d\sigma_{0,r} = \int P_x \, d\mu_{\eta(n)}.$$

Protože $\eta(n) \to 1$ pro $n \to \infty$, dostáváme $h_n(x) \to h(x)$, neboli

$$\int P_x \, d\mu_{\eta(n)} \to h(x) \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Protože $P_x \in \mathcal{C}(S_r(0))$, ze slabé konvergence dostáváme

$$\int P_x \, d\mu_{\eta(n)} \to \int P_x \, d\mu \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Dokázali jsme, že $h = P\mu$. Jednoznačnost plyne z (1.4.1). $\square$

1.5 Věty o průměru

Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^m$ budeme značit λ, dále označíme $\lambda_{a,r}$ *normalizovanou Lebesgueovu míru* na $B_r(a)$ (takže $\lambda_{a,r}(B_r(a)) = 1$).

1.5.1. Lemma. *Nechť $f \in \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$. Potom je funkce $\varrho \mapsto \int f \, d\sigma_{a,\varrho}$ spojitá na $]0,r[$ a*

$$\int f \, d\lambda_{a,r} = \frac{m}{r^m} \int_0^r \Big(\int f \, d\sigma_{a,\varrho} \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho.$$

Důkaz. Označme $\tau = \lambda(B_1(0))$, σ povrchovou míru na $S_1(0)$ a $\omega = \sigma(S_1(0))$. Je známo, že $\omega = m\tau$. Pro $\varrho \in]0,r[$ platí

$$\int f \, d\sigma_{a,\varrho} = \frac{1}{\omega \varrho^{m-1}} \int_{S_1(0)} f(a + \varrho s) \varrho^{m-1} \, d\sigma(s),$$

takže pro α, $\beta \in]0,r[$ je

$$\left| \int f \, d\sigma_{a,\alpha} - \int f \, d\sigma_{a,\beta} \right| \le \frac{1}{\omega} \int_{S_1(0)} |f(a + \alpha s) - f(a + \beta s)| \, d\sigma(s).$$

Funkce $(\varrho, s) \mapsto f(a + \varrho s)$ je stejnoměrně spojitá na $[0,r] \times S_1(0)$. Odtud snadno plyne spojitost na $]0,r[$ funkce

$$\varrho \mapsto \int f \, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Platí

$$\int f \, d\lambda_{a,r} = \frac{1}{\tau r^m} \int_0^r \Big(\int_{S_1(0)} f(a + \varrho s) \, d\sigma(s) \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho = \frac{m}{r^m} \int_0^r \Big(\int_{S_\varrho(a)} f \, d\sigma_{a,\varrho} \Big) \varrho^{m-1} \, d\varrho.$$

$\square$

1.5.2. Věta. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřená množina,* $h \in \mathcal{H}(U)$ *a* $\overline{B_r(a)} \subset U$. *Potom*

$$h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r} \qquad \text{a} \qquad h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r}.$$

Důkaz. Jak už jsme dříve viděli, je podle (1.3.3)

$$h(a) = \int h \cdot P_a \, d\sigma_{a,r} = \int h \, d\sigma_{a,r}.$$

Protože pro každé $\varrho \in]0, r[$ platí $\int h \, d\sigma_{a,\varrho} = h(a)$, vyplývá rovnost $h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r}$ ihned z (1.5.1). □

1.5.3. Věta. *Nechť* U *je oblast v* $\mathbb{R}^m$, $h \in \mathcal{H}(U)$. *Potom je buďto* $h = \inf h(U)$ *na* U, *nebo* $h > \inf h(U)$ *na* U.

Důkaz. Označme $M = \{x \in U; h(x) = \inf h(U)\}$. Pak M je uzavřená v U. Jestliže $a \in M$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak

$$h(a) = \inf h(U) = \int h \, d\lambda_{a,r},$$

takže $B_r(a) \subset M$. Je tedy M obojetná množina v U. Ze souvislosti U plyne, že buďto $M = U$, nebo $M = \emptyset$. □

1.5.4. Věta. *Nechť* $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ *je shora omezená nebo zdola omezená. Potom* h *je konstantní.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $h \geq 0$ všude na $\mathbb{R}^m$. Zvolme $x, y \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ a položme $R = r + |x - y|$. Potom $B_r(x) \subset B_R(y)$, takže

$$\int_{B_r(x)} h \, d\lambda \leq \int_{B_R(y)} h \, d\lambda.$$

Odtud

$$\lambda(B_r(x)) \int_{B_r(x)} h \, d\lambda_{x,r} = \lambda(B_r(x)) \, h(x) \leq \lambda(B_R(y)) \int_{B_R(y)} h \, d\lambda_{y,R} = \lambda(B_R(y)) \, h(y).$$

Pro každé $r > 0$ tedy platí

$$h(x) \leq \left(\frac{r + |x - y|}{r} \right)^m h(y),$$

což dává $h(x) \leq h(y)$. Protože $x, y \in \mathbb{R}^m$ byly libovolné body, platí také $h(y) \leq h(x)$, takže h je konstantní funkce. □

1.5.5. Věta. *Nechť* p *je nekonstantní polynom s komplexními koeficienty. Potom existuje* $z_0 \in \mathbb{C}$ *takové, že* $p(z_0) = 0$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť $p(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Víme, že existuje holomorfní funkce F taková, že $p = \exp F$. Protože $|p| = \exp(\operatorname{Re} F)$, pro funkci $h = \log |p|$ platí $h = \operatorname{Re} F \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ podle (1.1.1 (c)). (Zde obvyklým způsobem ztotožňujeme $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$.) Jelikož $|p(z)| \to \infty$ pro $z \to \infty$, platí $h(z) \to \infty$ pro $z \to \infty$, a tudíž je h zdola omezená nekonstantní funkce. To je ovšem ve sporu s (1.5.4). □

1.5.6. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená, $0 \in U$ a nechť $\lambda(U) < \infty$. Jestliže pro každou λ–integrovatelnou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$ platí*

$$h(0) = \frac{1}{\lambda(U)} \int_U h \, d\lambda,$$

potom je U koule o středu v počátku.

Důkaz. Nechť $y \in \mathbb{R}^m \setminus U$ je nejbližší bod k počátku, $r = |y|$ a $B = B_r(0)$. Všimněme si, že

$$\int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda = 0,$$

kdykoli h je integrovatelná harmonická funkce na U, pro niž $h(0) = 0$. Skutečně, s využitím (1.5.2),

$$0 = h(0)\lambda(U) = \int_U h \, d\lambda = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda + \int_B h \, d\lambda = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda + h(0) \cdot \lambda(B) = \int_{U \setminus \overline{B}} h \, d\lambda.$$

Definujme

$$K(x) = \frac{|x|^2 - r^2}{|x - y|^m} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{y\},$$

takže K je násobkem funkce P^y definované v (1.3). Funkce $h = K - K(0)$ je tedy harmonická a integrovatelná na U (srv. (1.1.1 (e))), $h(0) = 0$ a $h > 0$ na $U \setminus \overline{B}$. Platí tedy $\lambda(U \setminus \overline{B}) = 0$, tudíž $U \subset \overline{B}$. Jelikož $B \subset U$, platí $U = B$. $\square$

1.6 Obrácení vět o průměru

1.6.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h : U \to \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $h \in \mathcal{H}(U)$;

(ii) $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *a* $\Delta h = 0$ *na* U;

(iii) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a* $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$, *kdykoli* $\overline{B_r(a)} \subset U$;

(iv) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a* $h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r}$, *kdykoli* $\overline{B_r(a)} \subset U$;

(v) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a pro každé* $a \in U$ *existují* $r(n) > 0$ *tak, že* $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *je*
$$h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r(n)};$$

(vi) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a pro každé* $a \in U$ *existují* $r(n) > 0$ *tak, že* $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *je*
$$h(a) = \int h \, d\lambda_{a,r(n)}.$$

Důkaz. Podle (1.3.5) platí (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii) plyne z (1.5.2), (iii)⇒(iv) z (1.5.1). Protože implikace (iii)⇒(v) a (iv)⇒(vi) jsou zřejmé, zbývá dokázat, že (v)⇒(i) a (vi)⇒(i).

Nechť platí (v) a $\overline{B_r(c)} \subset U$. Označme $f = h|_{S_r(c)}$ a položme $g = Hf$. Podmínka (i) bude dokázána, jakmile ukážeme, že funkce $u = h - g$ je identicky rovna nule na $B_r(c)$.

Nechť u je kladná v některém bodě z $B_r(c)$. Označíme-li M množinu bodů z $B_r(c)$, v nichž u nabývá maxima, je M neprázdná kompaktní množina obsažená v $B_r(c)$ (spojité rozšíření funkce u na $\overline{B_r(c)}$ je rovno nule na $S_r(c)$). Zvolme bod $a \in M$, který má největší vzdálenost od bodu c. Zřejmě $a \in B_r(c)$ a podle předpokladu z (v) existuje $\varrho > 0$ tak, že $B_\varrho(a) \subset B_r(c)$ a $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,\varrho}$. Podle (1.5.2) je $g(a) = \int g \, d\sigma_{a,\varrho}$, takže také $u(a) = \int u \, d\sigma_{a,\varrho}$. Přitom $u \leq u(a)$ na $S_\varrho(a)$ a ostrá nerovnost platí na neprázdné otevřené části $S_\varrho(a)$, takže $u(a) > \int u \, d\sigma_{a,\varrho}$. Tento spor ukazuje, že $u \leq 0$, záměnou h a g dokážeme $u \geq 0$. Skutečně platí $g = Hf$ na $B_r(c)$.

Důkaz implikace (vi)⇒(i) je zcela analogický. □

1.6.2. Věta. *Pro $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ označme $x' = (-x_1, x_2, ..., x_m)$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina taková, že $x' \in U$ kdykoli $x \in U$. Označme*

$$U^+ = \{x \in U; x_1 > 0\}, \qquad U^- = \{x \in U; x_1 < 0\}, \qquad L = \{x \in U; x_1 = 0\}.$$

Nechť $g \in \mathcal{H}(U^+)$ a nechť

$$\lim_{x \to z} g(x) = 0, \qquad z \in L.$$

Definujme

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & na \quad U^+, \\ -g(x') & na \quad U^-, \\ 0 & na \quad L. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U)$.

Důkaz. Stačí ověřit podmínku (v) z (1.6.1). Zřejmě je $h \in \mathcal{C}(U)$ a pokud je $a \in U^+ \cup U^-$, platí $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$ pro všechna $r > 0$, která jsou menší než vzdálenost bodu a od L. Je-li $a \in L$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak $h(a) = 0$ a z definice h plyne, že

$$h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r} = 0.$$

Tím je podmínka (v) z (1.6.1) ověřena. □

1.7 Harnackova nerovnost

1.7.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^+(U)$, $f_1 = \sup \mathcal{F}$, $f_2 = \inf \mathcal{F}$. Potom $f_1 = \infty$ na U nebo $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(U)$, $f_2 = 0$ na U nebo $f_2 \in \mathcal{C}(U)$.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Označme pro $x \in B_r(a)$

$$c_1(x) = r^{m-2} \frac{r - |x-a|}{(r + |x-a|)^{m-1}}, \qquad c_2(x) = r^{m-2} \frac{r + |x-a|}{(r - |x-a|)^{m-1}}.$$

Podle (1.3.6) je pro každé každé $x \in B_r(a)$

$$f_1(a)\, c_1(x) \leq f_1(x) \leq f_1(a)\, c_2(x).$$

Odtud plyne, že U je sjednocením dvou otevřených disjunktních množin

$$\{x \in U; f_1(x) < \infty\} \qquad \text{a} \qquad \{x \in U; f_1(x) = \infty\}.$$

Platí tedy buďto $f_1 = \infty$ na U, nebo $f_1 < \infty$ na U. V druhém případě je

$$f_1(a)(c_1(x) - 1) \leq f_1(x) - f_1(a) \leq f_1(a)(c_2(x) - 1).$$

Zřejmě

$$\lim_{x \to a} c_j(x) = 1, \quad j \in \{1, 2\},$$

tedy f_1 je spojitá v bodě a. $\square$

1.7.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $K \subset U$ je kompaktní množina. Potom existuje $c_K > 0$ tak, že pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ a každé dva body $x, y \in K$ platí*

$$c_K^{-1} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq c_K.$$

Jinak řečeno: Pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U)$ platí

$$\sup h(K) \leq c_K \inf h(K).$$

Důkaz. Pro každou $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ je $h > 0$ podle (1.5.3). Zvolme $a \in K$ a označme

$$\mathcal{F} = \{h \in \mathcal{H}^+(U); h(a) = 1\}, \qquad f_1 = \sup \mathcal{F}, \qquad f_2 = \inf \mathcal{F}.$$

Podle (1.7.1) je f_1 spojitá (reálná) funkce a f_2 je spojitá kladná funkce. Označme

$$\alpha = \inf f_2(K), \qquad \beta = \sup f_1(K).$$

Zřejmě $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. Je-li $h \in \mathcal{F}$, $x, y \in K$, potom

$$\alpha \leq h(x) \leq \beta, \qquad \alpha \leq h(y) \leq \beta,$$

takže

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nyní stačí volit $c_K = \beta/\alpha$ a uvědomit si, že pro $h \in \mathcal{H}^+(U) \setminus \{0\}$ je $h/h(a) \in \mathcal{F}$. $\square$

1.8 Harnackovy věty

1.8.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h_n \in \mathcal{H}(U)$ a nechť (h_n) konverguje lokálně stejnoměrně k funkci h. Potom $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Důkaz. Zřejmě $h \in \mathcal{C}(U)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom pro každé n platí podle (1.5.2) rovnost $\int h_n \, d\sigma_{a,r} = h_n(a)$. Odtud $h(a) = \int h \, d\sigma_{a,r}$. Podle (1.6.1) je $h \in \mathcal{H}(U)$. $\square$

Nechť $\mathcal{F}$ je systém funkcí (s hodnotami v $\mathbb{R}^*$) definovaných na množině X. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je *nahoru filtrující*, jestliže pro každé dvě funkce $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f \geq \max(f_1, f_2)$.

1.8.2. Věta. *Nechť $\mathcal{F} \neq \emptyset$ je nahoru filtrující systém harmonických funkcí na oblasti $U \subset \mathbb{R}^m$, $h = \sup \mathcal{F}$. Potom buďto $h = \infty$ na U, nebo $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Důkaz. Zvolme $h_0 \in \mathcal{F}$. Potom

$$\sup \mathcal{F} = \sup\{f \in \mathcal{F}; f \geq h_0\}.$$

Je-li totiž $h_1 \in \mathcal{F}$, existuje $h_2 \in \mathcal{F}$ tak, že $h_2 \geq \max(h_0, h_1)$. Definujme

$$\mathcal{F}_0 = \{f - h_0; f \in \mathcal{F}, f \geq h_0\}.$$

Potom $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}^+(U)$ a $\sup \mathcal{F}_0 = h - h_0$.

Podle (1.7.1) je buďto $h - h_0 = \infty$ na U (pak ovšem $h = \infty$ na U), nebo $h - h_0 \in \mathcal{C}(U)$, tedy $h \in \mathcal{C}(U)$.

Je-li $K \subset U$ kompaktní množina, je $h|_K$ spojitá funkce, která je supremem nahoru filtrujícího systému spojitých funkcí $f|_K$, $f \in \mathcal{F}$. Z Diniho věty (srv. např. s (2.1.6)) vyplývá existence funkcí $f_n \in \mathcal{F}$ takových, že $f_n \to h$ na K stejnoměrně.

Podle (1.8.1) je na vnitřku K funkce h harmonická. Odtud plyne, že $h \in \mathcal{H}(U)$. □

1.8.3. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $a \in U$ a nechť (h_n) je neklesající posloupnost harmonických funkcí na U, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Je-li $h(a) < \infty$, pak $h \in \mathcal{H}(U)$.*

1.8.4. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a nechť $\mathcal{F}$ je lokálně stejně omezená množina harmonických funkcí na U. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v topologii lokálně stejnoměrné konvergence.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Arzèla-Ascoliho věty, pokud dokážeme, že funkce z $\mathcal{F}$ jsou stejně spojité v každém bodě každé kompaktní množiny obsažené v U.

Nechť tedy $K \subset U$ je kompaktní. Zvolme $r > 0$ tak, aby pro každé $a \in K$ platilo $B_{3r}(a) \subset U$. Označme L množinu všech bodů z $\mathbb{R}^m$, jejichž vzdálenost od K je menší nebo rovna $2r$. Potom L je kompaktní podmnožina U a existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|h| \leq M$ na L, kdykoli $h \in \mathcal{F}$. Nechť $a \in K$. Je-li $x \in B_r(a)$, je $B_r(x) \subset B_{2r}(a) \subset L$, takže podle (1.3.7) je

$$|D_j h(x)| \leq mM/r, \text{ kdykoli } h \in \mathcal{F} \text{ a } j \in \{1, ..., m\}.$$

Pro $h \in \mathcal{F}$ tedy platí

$$\begin{aligned} &|h(x) - h(a)| \leq \sup |\operatorname{grad} h|(B_r(a))\, |x - a| \leq \\ &\leq \sqrt{m}\, \max\{\sup |D_j h|(B_r(a)); j \in \{1, ..., m\}\}\, |x - a| \leq \sqrt{m}\, mM/r\, |x - a|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že funkce z $\mathcal{F}$ jsou stejně spojité v každém bodě množiny K. □

1.9 Greenova funkce pro kouli

V (1.3) jsme definovali Poissonovo jádro a ukázali, že Poissonův integrál poskytuje řešení Dirichletovy úlohy na kouli. Poissonovo jádro vstoupilo do hry poněkud mysticky, vzorec jako by „spadl z nebe". Nyní jej přirozeným způsobem odvodíme.

Budeme užívat Gauss-Greenovu větu pro omezené otevřené množiny s hladkou hranicí. Jediné, co ve skutečnosti budeme potřebovat, je verze této věty pro případ množiny

$$V = B_R(a) \setminus \overline{B_r(b)}, \qquad 0 \leq r < R - |b - a|.$$

Uvažujme omezenou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^m$ s hladkou hranicí, symbolem n_V označme vnější normálu k V a σ povrchovou míru na ∂V. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $U \supset \overline{V}$. Je-li $v = (v_1, ..., v_m)$ vektorová funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na U, pak

$$\int_V \operatorname{div} v \, d\lambda = \int_{\partial V} v\, n_V \, d\sigma.$$

Připomínáme, že $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{m} D_j v_j$. Pro funkci $v \in \mathcal{C}^1(U)$ jako obvykle značíme

$$\operatorname{grad} v = (D_1 v, ..., D_m v),$$

takže pro $v \in \mathcal{C}^2(U)$ je $\operatorname{div} \operatorname{grad} v = \Delta v$. Pro $v \in \mathcal{C}^1(U)$ se funkce

$$y \mapsto \operatorname{grad} v(y)\, n_V(y), \qquad y \in \partial V,$$

značí $D_n v$ (*normální derivace funkce* v).

Jestliže $u \in \mathcal{C}^1(U)$, $v \in \mathcal{C}^2(U)$, pak

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u\Delta v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v,$$

takže z Gauss-Greenovy věty plyne

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v)\, d\lambda = \int_{\partial V} u\, D_n v\, d\sigma.$$

Odtud pro $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ dostáváme tzv. Greenovu identitu

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)\, d\lambda = \int_{\partial V} (uD_n v - vD_n u)\, d\sigma.$$

1.9.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $h \in \mathcal{H}(U)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Potom*

$$\int_{S_r(a)} D_n h\, d\sigma = 0.$$

Důkaz. V Greenově identitě stačí volit $u = 1$, $v = h$. □

Označme opět $\omega = \sigma(S_1(0))$ povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^m$ a definujme pro $t > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2. \end{cases}$$

Dále klademe $p(0) = \infty$.

Pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ definujeme $N(x, y) = p(|x - y|)$; symbol N_x má obvyklý význam, (srv. např. (1.3)). Funkce N se v případě $m = 2$ nazývá *logaritmické jádro* a v případě $m > 2$ *Newtonovo jádro*. Všimněme si, že pro $N_0 : y \mapsto p(|y|)$ platí

$$\operatorname{grad} N_0(y) = -\frac{1}{\omega} \frac{y}{|y|^m}, \qquad y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Zvolená normalizace má toto ospravedlnění:

1.9.2. Věta. *Pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ mající kompaktní nosič platí*

$$\int_{\mathbb{R}^m} (-N_0)\Delta\varphi\, d\lambda = \varphi(0).$$

Důkaz. Nechť $r > 0$ a $R > r$ takové, že $\varphi = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)$. Označme

$$M = \sup |\operatorname{grad} \varphi|(\mathbb{R}^m) \text{ a } V = B_R(0) \setminus B_r(0).$$

Z Greenovy identity dostáváme

$$\int_V N_0 \Delta\varphi \, d\lambda = \int_V \Delta N_0 \, \varphi + \int_{\partial V} (N_0 D_n \varphi - \varphi D_n \, N_0) \, d\sigma.$$

Označme n vnější normálu k $B_r(0)$, takže na $S_r(0)$ platí $n_V = -n$. Z (1.1.1(d)) víme, že $\Delta N_0 = 0$ na V, dále $\varphi = 0$ na okolí $S_R(0)$, takže $D_n \varphi = 0$ na $S_R(0)$. Platí tedy

$$\int_V N_0 \, \Delta\varphi \, d\lambda = -\int_{S_r(0)} N_0 \, D_n \varphi \, d\sigma + \int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma.$$

Zřejmě

$$\Big| \int_{S_r(0)} N_0 \, D_n \varphi \, d\sigma \Big| \leq p(r) M \omega r^{m-1} \to 0 \quad \text{pro} \quad r \to 0+ \, .$$

Dále

$$D_n N_0(y) = -\frac{1}{\omega} \frac{y}{|y|^m} \frac{y}{|y|}, \qquad y \in S_r(0)$$

(zde uvažujeme normální derivaci vzhledem k $B_r(0)$), takže

$$\int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma = -\frac{1}{\omega r^{m-1}} \int_{S_r(0)} \varphi \, d\sigma \to -\varphi(0)$$

pro $r \to 0+$. Protože $N_0 \in L^1(B_R(0))$, dostáváme okamžitě rovnost z věty pro $r \to 0+$. □

1.9.3. Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}^m$ označme ε_a Diracovu míru soustředěnou v bodě a. Věta (1.9.2) říká, že *distributivní laplasián* funkce $-N_0$ je roven ε_0, neboli $-N_0$ je *fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.*

Z (1.9.2) plyne, že pro každou $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$, tj. funkci z $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ s kompaktním nosičem, platí

$$\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^m} N(x, y) \, \Delta\varphi(y) \, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Pro $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$ a $x \in \mathbb{R}^m$ položme

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} N(x, y) \, f(y) \, d\lambda(y).$$

Protože

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} N_0(y) \, f(x - y) \, d\lambda(y),$$

je podle věty o derivování za integračním znamením $\Delta(Tf) = T(\Delta f) = -f$, kdykoli $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$. Na prostoru $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$ je tedy $T \circ \Delta = \Delta \circ T = -I$, takže integrální operátor $-T$ je na $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$ inverzním operátorem k diferenciálnímu operátoru Δ.

Pro $g \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^m)$ je tudíž snadné najít řešení u tzv. Poissonovy rovnice $\Delta u = g$. Stačí položit $u = -Tg$.

1.9.4. Lemma. *Nechť $\varphi \in \mathcal{C}(S_r(0))$. Potom*

$$\int_{S_r(0)} \varphi \, D_n N_0 \, d\sigma = -\int_{S_r(0)} \varphi \, d\sigma_{0,r}$$

(*normální derivace vzhledem k* $B_r(0)$).

Důkaz. Zřejmě
$$D_n N_0 = -\frac{1}{\omega r^{m-1}}$$
na $S_r(0)$. □

Následující úvahu budeme ve skutečnosti užívat pro velmi speciální případ, že U je koule. Nicméně vyšetření obecného případu přináší lepší pochopení integrální reprezentace řešení Dirichletovy úlohy.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina s hladkou hranicí, h je harmonická funkce definovaná na okolí $\overline{U}$ a $x \in U$. Hodnota $h(x)$ je podle (1.2.1) jednoznačně určena hodnotami funkce $h|_{\partial U}$ a naší snahou je najít vyjádření $h(x)$ pomocí těchto hodnot. Zvolme $r > 0$ tak, aby pro $B = B_r(x)$ platilo $\overline{B} \subset U$ a označme $V(r) = U \setminus B$. Je-li g harmonická funkce na okolí $\overline{V(r)}$, pak podle Greenovy identity
$$0 = \int_{V(r)} (h\Delta g - g\Delta h)\, d\lambda = \int_{\partial V(r)} (hD_n g - gD_n h)\, d\sigma.$$
Uvážíme-li, že $n_{V(r)} = -n_B$ na $S_r(x)$ a $\partial V = \partial U \cup S_r(x)$, dostáváme
$$\int_{S_r(x)} h(\operatorname{grad} g\, n_B)\, d\sigma - \int_{S_r(x)} g(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma =$$
$$= \int_{\partial U} h(\operatorname{grad} g\, n_U)\, d\sigma - \int_{\partial U} g(\operatorname{grad} h\, n_U)\, d\sigma.$$
Poslední integrál zahrnuje hodnoty normální derivace funkce h, které neznáme. Bylo by tudíž účelné volit funkci g tak, že $g|_{\partial U} = 0$. Jestliže má g být harmonická na V pro každé dostatečně malé r, pak se přirozenou volbou jeví hledat g ve tvaru $N_x + L_x$ s funkcí L_x harmonickou na okolí $\overline{U}$.

Předpokládejme tedy:

($*$) Existuje funkce L_x harmonická na okolí množiny $\overline{U}$ tak, že $G_x := N_x + L_x = 0$ na ∂U. (Z principu minima plyne, že L_x je na $\overline{U}$ jednoznačně určena.)

Zřejmě pro $r \to 0+$
$$\int_{S_r(x)} h(grad\, L_x\, n_B)\, d\sigma \to 0, \qquad \int_{S_r(x)} L_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma \to 0.$$
Z (1.9.4) a (1.5.2) plyne (pro $r \to 0+$)
$$\int_{S_r(x)} h(\operatorname{grad} N_x\, n_B)\, d\sigma \to -h(x).$$
Protože
$$\int_{S_r(x)} N_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma = p(r) \int_{S_r(x)} \operatorname{grad} h\, n_B\, d\sigma,$$
je podle (1.9.1)
$$\int_{S_r(x)} N_x(\operatorname{grad} h\, n_B)\, d\sigma = 0.$$
Pro $g = G_x$ tedy pro $r \to 0+$ dostáváme
$$h(x) = -\int_{\partial U} h\, D_n G_x\, d\sigma.$$

Nyní nás zajímá případ $U = B_r(a)$ a pro jednoduchost předpokládejme, že $a = 0$. Zabývejme se podmínkou $(*)$ a zkusme najít L_x ve tvaru $\alpha N_{\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta x \notin \overline{B_r(0)}$. Pokud to je možné, funkce

$$y \mapsto \frac{|y - x|}{|y - \beta x|}$$

je konstantní na $S_r(0)$, má tedy stejnou hodnotu v bodech $rx/|x|$ a $-rx/|x|$. Jednoduchými úpravami rovnosti

$$\frac{\left|rx/|x| - x\right|^2}{\left|rx/|x| - \beta x\right|^2} = \frac{\left|rx/|x| + x\right|^2}{\left|rx/|x| + \beta x\right|^2}$$

dospějeme k

$$\beta r^2 + \beta |x|^2 = r^2 + \beta^2 |x|^2,$$

a protože $\beta \neq 1$, dostaneme $\beta = r^2/|x|^2$.

Tato předběžná úvaha nás vede k domněnce, že bod $x^* = (r^2/|x|^2)\,x$ bude významný v souvislosti s podmínkou $(*)$.

1.9.5. Lemma. *Položme $s(y) = |x - y|$, $t(y) = |x^* - y|$, $y \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$\frac{s(y)}{t(y)} = \frac{|x|}{r}, \qquad y \in S_r(0)$$

a pro derivaci podle vnější normály k $B_r(0)$ platí

$$D_n s(y) - \frac{|x|}{r} D_n t(y) = \frac{r^2 - |x|^2}{r s(y)}, \qquad y \in S_r(0).$$

Důkaz. Pro $y \in S_r(0)$ platí

$$t^2(y) = \left|\frac{r^2}{|x|^2}x - y\right|^2 = \frac{r^4}{|x|^2} - 2xy\frac{r^2}{|x|^2} + |y|^2 = \frac{r^2}{|x|^2}(r^2 - 2xy + |y|^2\frac{|x|^2}{r^2}) = \frac{r^2}{|x|^2}|x - y|^2,$$

neboť $|y| = r$. Odtud plyne první část tvrzení.

Pro $y \in S_r(0)$ je $D_n s(y) = y(y - x)/rs(y)$,

$$D_n t(y) = \frac{y(y - x^*)}{rt(y)} = \frac{y(y - x^*)}{r^2 s(y)/|x|} = \frac{y(y - x^*)}{rs(y)}\frac{|x|}{r},$$

takže

$$D_n s(y) - \frac{|x|}{r} D_n t(y) = \frac{r^2 - xy}{rs(y)} - \frac{|x|^2}{r^2}\frac{r^2 - x^* y}{rs(y)} =$$
$$= \frac{1}{rs(y)}(r^2 - xy - |x|^2 + \frac{|x|^2}{r^2}\frac{r^2}{|x|^2}xy) = \frac{r^2 - |x|^2}{rs(y)}.$$

□

1.9.6. Věta. *Nechť $x \in B_r(0)$, $x^* = (r^2/|x|^2)x$ pro $x \neq 0$. Pro $x \neq 0$ definujme pro $y \neq x^*$*

$$L_x(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log(r|y - x^*|/|x|) & \textit{pro případ } m = 2, \\[2ex] -\dfrac{1}{(m-2)\,\omega}(r/|x||y - x^*|)^{m-2} & \textit{pro případ } m > 2. \end{cases}$$

Dále definujme pro $y \in \mathbb{R}^m$

$$L_0(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{r} & \textit{pro případ } m = 2, \\[2ex] -\dfrac{1}{(m-2)\,\omega} \dfrac{1}{r^{m-2}} & \textit{pro případ } m > 2. \end{cases}$$

Potom je funkce L_x harmonická na okolí $\overline{B_r(0)}$ a pro $G_x := N_x + L_x$ platí $G_x|_{S_r(0)} = 0$. Je-li h harmonická funkce na okolí $\overline{B_r(0)}$, potom

$$h(x) = -\int_{S_r(0)} h\, D_n G_x \, d\sigma.$$

Důkaz. Funkce L_x je zřejmě harmonická na okolí $\overline{B_r(0)}$ a zřejmě $N_0 + L_0 = 0$ na $S_r(0)$. Nechť $x \neq 0$. V případě $m = 2$ je pro $y \in S_r(0)$ podle lemmatu (1.9.5)

$$N_x(y) + L_x(y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} \frac{|x|}{r} |y - x^*| = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x| t(y)}{r s(y)} = \frac{1}{2\pi} \log 1 = 0,$$

v případě $m > 2$ je pro $y \in S_r(0)$

$$N_x(y) + L_x(y) = \frac{1}{(m-2)\,\omega} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \left(\frac{r}{|x||y-x^*|} \right)^{m-2} \right) = 0,$$

neboť

$$\frac{r}{|x||y-x^*|} = \frac{1}{|x-y|}$$

podle lemmatu (1.9.5).

Vzorec pro $h(x)$ jsme již dokázali. □

1.9.7. Lemma. *Pro $y \in S_r(0)$ platí*

$$D_n G_x(y) = -\frac{1}{\omega r} \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^m}.$$

Důkaz. Při označení z (1.9.5) a za (1.9.1) platí v případě $x \neq 0$ na okolí $\overline{B_r(0)}$ rovnost

$$G_x = p \circ s - p \circ \frac{|x| t}{r}.$$

To ihned plyne z (1.9.6). Proto

$$D_n G_x = (p' \circ s)\, D_n s - p' \circ \frac{|x| t}{r}\, D_n t \,\frac{|x|}{r}.$$

Podle (1.9.5) na $S_r(0)$ platí

$$\frac{|x| t}{r} = s, \qquad D_n s - \frac{|x|}{r} D_n t = \frac{r^2 - |x|^2}{r s},$$

tudíž na $S_r(0)$ je

$$D_n G_x = (p' \circ s) \frac{r^2 - |x|^2}{r s}.$$

Zřejmě

$$p'(\tau) = -\frac{1}{\omega}\frac{1}{\tau^{m-1}}, \qquad \tau > 0,$$

takže

$$D_n G_x = -\frac{1}{\omega}\frac{r^2 - |x|^2}{r s^m}.$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. $\square$

1.9.8. Věta. *Nechť h je funkce harmonická na okolí $B_r(a)$. Potom pro každé $x \in B_r(a)$ je*

$$h(x) = \int h(y)\, r^{m-2}\, \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}\, d\sigma_{a,r}(y).$$

Důkaz. Protože $\sigma_{a,r} = \sigma/\omega r^{m-1}$ na $S_r(a)$, plyne pro $a = 0$ tvrzení ihned z (1.9.6) a (1.9.7). Pro obecné a se výsledek dostane posunutím. $\square$

1.9.9. Poznámka. Při označení z (1.3) lze poslední vzorec přepsat do tvaru

$$h(x) = \int_{S_r(a)} h\, P_x\, d\sigma_{a,r}.$$

Funkce $G_x = N_x + L_x$ z (1.9.6) se nazývá *Greenova funkce* koule $B_r(0)$ s pólem v bodě x. Protože $L_x = -N_x$ na $S_r(0)$, platí zřejmě (při označení z (1.3))

$$G_x = N_x - H(N_x|_{S_r(0)}).$$

Ukázali jsme, že $P_x = -D_n G_x$, tedy Poissonovo jádro je (až na znaménko) normální derivací Greenovy funkce.

Kapitola 2

Hyperharmonické funkce

2.1 Polospojité funkce

V tomto paragrafu bude X Hausdorffův topologický prostor. Pro $x \in X$ označme $\mathcal{V}(x)$ systém všech otevřených okolí bodu x. Nechť $D \subset X$ a $u : D \to \mathbb{R}^*$. Pro $M \subset D$ a $x \in \overline{M}$ definujeme

$$\liminf_{y \to x,\, y \in M} u(y) = \sup\{\inf u(M \cap V); V \in \mathcal{V}(x)\},$$

$$\limsup_{y \to x,\, y \in M} u(y) = \inf\{\sup u(M \cap V); V \in \mathcal{V}(x)\}.$$

V případě $M = D$ píšeme pouze $\liminf_{y \to x} u(y)$, $\limsup_{y \to x} u(y)$.

Říkáme, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je *zdola polospojitá v bodě* $x \in D$, jestliže $u(x) > -\infty$ a $u(x) = \liminf_{y \to x} u(y)$. Říkáme, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je *shora polospojitá v bodě* $x \in D$, jestliže $u(x) < \infty$ a $u(x) = \limsup_{y \to x} u(y)$. Zřejmě tedy funkce u je zdola polospojitá v bodě $x \in D$, právě když je funkce $-u$ shora polospojitá v bodě x. Z definic okamžitě vyplývá, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je spojitá v bodě x, právě když je v bodě x zdola polospojitá i shora polospojitá.

Funkce u se nazývá *zdola* (resp. *shora*) *polospojitá* na D, je-li zdola (resp. shora) polospojitá v každém bodě $x \in D$. Snadno se ověří, že funkce $u : D \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá na D, právě když $u > -\infty$ na D a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D; u(x) > c\}$ otevřená v D.

Množina všech zdola polospojitých funkcí na D tvoří zřejmě min-stabilní konvexní kužel.

2.1.1. Věta. *Nechť $X \neq \emptyset$ je kompaktní topologický prostor a $u : X \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá funkce. Potom existuje $x \in X$ tak, že $u(x) = \inf u(X)$. Speciálně je tedy funkce u zdola omezená na X.*

Důkaz. Pro každé $y \in X$ zvolme $c(y) \in \mathbb{R}$ a $V(y) \in \mathcal{V}(y)$ tak, aby $\inf u(V(y)) > c(y)$. Protože prostor X je kompaktní, existuje konečná množina $F \subset X$ tak, že $X = \cup\{V(y); y \in F\}$. Označme $c = \min\{c(y); y \in F\}$. Potom $\inf u(X) > c$.

Označme $d = \inf u(X)$. Potom je pro každé $\varepsilon > 0$ množina

$$C_\varepsilon = \{y \in X; u(y) \leq d + \varepsilon\}$$

uzavřená a tudíž kompaktní. Je-li $E \subset \,]0, \infty[$ konečná množina, pak zřejmě

$$\bigcap\{C_\varepsilon; \varepsilon \in E\} \neq \emptyset.$$

Protože prostor X je kompaktní, existuje $x \in \cap\{C_\varepsilon; \varepsilon \in \,]0, \infty[\}$. Zřejmě je $u(x) = d$. $\square$

Z definice snadno vyplývá toto tvrzení: Je-li $\mathcal{F} \neq \emptyset$ množina zdola polospojitých funkcí, pak $\sup \mathcal{F}$ je zdola polospojitá funkce.

Označme $\mathcal{C}(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X, $\mathcal{C}^+(X)$ množinu nezáporných funkcí z $\mathcal{C}(X)$.

2.1.2. Věta. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *prostor X je úplně regulární,*

(ii) *pro každou zdola polospojitou nezápornou funkci u platí*

$$u = \sup\{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Důkaz. Nechť platí (i), u je zdola polospojitá nezáporná funkce a nechť $x \in X$. Je-li $u(x) = 0$, je rovnost

$$u = \sup\{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}$$

zřejmá. Nechť $u(x) > 0$, $c \in \,]0, u(x)[$ a $V \in \mathcal{V}(x)$ je okolí zvolené tak, že $u > c$ na V. Protože prostor X je úplně regulární, existuje $g \in \mathcal{C}(X)$ tak, že $0 \leq g \leq c$, $g = 0$ na $X \setminus V$ a $g(x) = c$. Platí tedy

$$\sup\{f(x); f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\} \geq c.$$

Odtud plyne rovnost

$$u(x) = \sup\{f(x); f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Nechť platí (ii), $x \in X$ a $F \subset X$ je uzavřená množina, $x \notin F$. Nechť u je charakteristická funkce množiny $X \setminus F$. Protože F je uzavřená, je u zdola polospojitá a podle (ii) existuje $g \in \mathcal{C}(X)$ tak, že $g \leq u$ a $g(x) > 1/2$. Položme

$$f = \max\Big(0, \min\Big(\frac{g}{g(x)}, 1\Big)\Big).$$

Potom $f \in \mathcal{C}(X)$, $f(X) \subset [0,1]$, $f(F) = \{0\}$, $f(x) = 1$. Odtud plyne (i). $\square$

2.1.3. Korolár. *Nechť X je kompaktní topologický prostor a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom*

$$u = \sup\{f; f \in \mathcal{C}(X), f \leq u\}.$$

Důkaz. Plyne z (2.1.1) a (2.1.2). $\square$

2.1.4. Tvrzení. *Nechť X je kompaktní topologický prostor se spočetnou bází a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom existují funkce $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $f_n \nearrow u$.*

Důkaz. Nechť u je zdola polospojitá funkce na X. Lze předpokládat, že $u \geq 0$. Protože X je metrizovatelný prostor, je prostor $\mathcal{C}(X)$ (se supremovou metrikou) separabilní a tedy také podprostor

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{C}(X); f \leq u\}$$

je separabilní. Nechť $\mathcal{G}$ je hustá spočetná podmnožina v $\mathcal{K}$. Tvrdíme, že $u = \sup \mathcal{G}$. Nechť $x \in X$ a $c < u(x)$. Podle (2.1.3) existuje $f \in \mathcal{K}$, $f(x) > c$, a protože $\mathcal{G}$ je hustá podmnožina v $\mathcal{K}$, existuje $g \in \mathcal{G}$ tak, že

$$|f(x) - g(x)| < f(x) - c,$$

takže $g(x) > c$, Odtud plyne $u(x) = (\sup \mathcal{G})(x)$. Nechť $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, ...\}$ a

$$f_n = \max\{g_j; 1 \leq j \leq n\}.$$

Potom $f_n \in \mathcal{K}$ a $f_n \nearrow u$. $\square$

2.1.5. Korolár. *Nechť X je kompaktní prostor se spočetnou bází, μ Radonova míra na X a u je zdola polospojitá funkce na X. Potom*

$$\int u\,d\mu = \sup\Big\{\int f\,d\mu; f \in \mathcal{C}(X), f \le u\Big\}.$$

Důkaz. Plyne ihned z (2.1.4) a z Leviho věty. □

2.1.6. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor, $f \in \mathcal{C}(X)$ a nechť $\mathcal{F}$ je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí na X, pro něž $f = \sup \mathcal{F}$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $u \in \mathcal{F}$ tak, že $u > f - \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\mathcal{G} = \{f - u; u \in \mathcal{F}\}$. Potom je $\mathcal{G}$ dolů filtrující množina shora polospojitých funkcí na X, pro niž $\inf \mathcal{G} = 0$. Je-li $x \in X$, existuje $g_x \in \mathcal{G}$ tak, že $g_x(x) < \varepsilon$ a tudíž existuje $V(x) \in \mathcal{V}(x)$ tak, že $g_x < \varepsilon$ na $V(x)$. Protože prostor X je kompaktní, existuje konečná množina F tak, že $X = \cup\{V(x); x \in F\}$. Protože $\mathcal{G}$ je dolů filtrující, existuje $g \in \mathcal{G}$ tak, že $g \le \min\{g_x; x \in F\}$. Zřejmě $g < \varepsilon$ na X. Nyní stačí položit $u = f - g$. □

2.1.7. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor se spočetnou bází, $\mathcal{F} \ne \emptyset$ je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí na X a μ je Radonova míra na X. Potom*

$$\int (\sup \mathcal{F})\,d\mu = \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\sup \mathcal{F} = 0$ na X. Nechť $\varepsilon > 0$ a $u \in \mathcal{F}$ taková funkce, že $u > -\varepsilon$ na X; taková funkce existuje podle (2.1.6). Potom

$$\int u\,d\mu \ge -\varepsilon\mu(X),$$

tudíž

$$\sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} \ge -\varepsilon\mu(X).$$

Odtud plyne, že

$$\sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} = 0.$$

V obecném případě položme $f = \sup \mathcal{F}$. Potom f je zdola polospojitá (a tudíž zdola omezená) funkce na X a zřejmě

$$\int f\,d\mu \ge \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Nechť $c < \int f\,d\mu$. Podle (2.1.5) existuje $g \in \mathcal{C}(X)$, $g \le f$ taková, že $\int g\,d\mu > c$. Potom

$$\mathcal{G} = \{(u-g)^-; u \in \mathcal{F}\}$$

je nahoru filtrující množina zdola polospojitých funkcí a $\sup \mathcal{G} = 0$. Podle první části důkazu je

$$\sup\Big\{\int (u-g)^-\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} = 0.$$

Protože $(u-g)^- \le (u-g)$, je

$$\sup\Big\{\int (u-g)\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\} \ge 0,$$

tudíž
$$c < \int g\,d\mu \le \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$
Odtud plyne nerovnost
$$\int f\,d\mu \le \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$
Platí tedy rovnost
$$\int (\sup \mathcal{F})\,d\mu = \sup\Big\{\int u\,d\mu; u \in \mathcal{F}\Big\}.$$
□

2.1.8. Lemma. *Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $t > 0$ a nechť u je zdola polospojitá funkce na $\overline{B_t(a)}$. Potom*
$$\int u\,d\lambda_{a,t} = m \int_0^1 \Big(\int u\,d\sigma_{a,\alpha t}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha.$$

Důkaz. Nechť nejprve $f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)})$. Podle (1.5.1) je funkce $\varrho \mapsto \int f\,d\sigma_{a,\varrho}$ spojitá na $]0,t[$ a
$$\int f\,d\lambda_{a,t} = \frac{m}{t^m}\int_0^t \Big(\int f\,d\sigma_{a,\varrho}\Big)\varrho^{m-1}\,d\varrho.$$
Poslední integrál je roven
$$\frac{m}{t^m}\int_0^t \frac{1}{\omega}\Big(\int_{S_1(0)} f(a+\varrho s)\,d\sigma(s)\Big)\varrho^{m-1}\,d\varrho =$$
$$= \frac{m}{t^m}\int_0^1 \frac{1}{\omega}\Big(\int_{S_1(0)} f(a+\alpha t s)\,d\sigma(s)\Big)(\alpha t)^{m-1} t\,d\alpha = m\int_0^1 \Big(\int f\,d\sigma_{a,\alpha t}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha.$$

Je-li u zdola polospojitá na $\overline{B_t(a)}$, je podle (2.1.3) a (2.1.7)
$$\int u\,d\lambda_{a,t} = m \sup\Big\{\int_0^1\Big(\int f\,d\sigma_{a,\alpha t}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha; f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)}), f \le u\Big\} =$$
$$= m\int_0^1 \sup\Big\{\Big(\int f\,d\sigma_{a,\alpha t}\Big)\alpha^{m-1}; f \in \mathcal{C}(\overline{B_t(a)}), f \le u\Big\}\,d\alpha = m\int_0^1\Big(\int u\,d\sigma_{a,\alpha t}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha.$$
□

Zavedeme následující definici. Nechť $f : X \to \mathbb{R}^*$ a $M \subset X$. Řekneme, že f splňuje na M *ostrý princip minima*, jestliže platí tato podmínka: je-li $x \in M$ a $f(x) = \inf f(M)$, pak f je na M konstantní. (Jinak řečeno: f nenabývá na M minima, pokud není na M konstantní.)

Řekneme, že f splňuje na X *lokálně ostrý princip minima*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $V \in \mathcal{V}(x)$ tak, že f splňuje na V ostrý princip minima.

(Příklad: Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $h \in \mathcal{H}(U)$, pak h splňuje podle (1.5.3) na U lokálně ostrý princip minima.)

2.1.9. Věta. *Nechť X je souvislý prostor, u je zdola polospojitá funkce na X a nechť u splňuje na X lokálně ostrý princip minima. Potom u splňuje na X ostrý princip minima.*

Důkaz. Označme $c = \inf u(X)$. Je-li $c = -\infty$, tvrzení platí, neboť $u > -\infty$ na X. Nechť $c > -\infty$,

$$U = \{x \in X; u(x) > c\}, \qquad V = \{x \in X; u(x) = c\}.$$

Potom U je otevřená, neboť u je zdola polospojitá. Je-li $x \in V$, je podle předpokladu $u = c$ na jistém okolí bodu x, tudíž V je otevřená. Protože $X = U \cup V$ a prostor X je souvislý, je buďto $U = X$ nebo $V = X$. □

2.1.10. Věta. *Nechť X je kompaktní prostor, $U \subset X$ je oblast, $\partial U \neq \emptyset$, $u : U \to \mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá funkce a nechť u splňuje na U lokálně ostrý princip minima. Potom*

$$\inf u(U) = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial U\}.$$

Přitom existuje $y \in \partial U$ tak, že

$$\inf u(U) = \liminf_{x \to y} u(x).$$

Důkaz. Označme $b = \inf u(U)$, $c = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial U\}$. Zřejmě platí $b \leq c$. Předpokládejme, že $b < c$; odvodíme spor. Definujme

$$v = \begin{cases} u & \text{na } U, \\ c & \text{na } X \setminus U. \end{cases}$$

Zřejmě je funkce v zdola polospojitá v každém bodě množiny $U \cup (X \setminus \overline{U})$. Nechť $z \in \partial U$, $d < v(z)$. Protože

$$v(z) = c \leq \liminf_{x \to z} u(x),$$

existuje $V \in \mathcal{V}(z)$ tak, že $d < \inf u(U \cap V)$. Na $V \setminus U$ je $v = c = v(z) > d$, na $U \cap V$ je $v = u \geq \inf u(U \cap V) > d$, tudíž funkce v je zdola polospojitá v bodě z. Protože v je zdola polospojitá na X, existuje $x \in X$ tak, že $v(x) = \inf v(X)$. Protože $c > b = \inf u(U)$, je $x \in U$. Podle (2.1.9) je u na U konstantní, tedy $c = b$, neboť $\partial U \neq \emptyset$. Odvodili jsme spor. Platí proto $c \leq b$ a tedy $c = b$.

Jestliže existuje $y \in \partial U$ tak, že $\liminf_{x \to y} u(x) = -\infty$, pak zřejmě $\inf u(U) = -\infty$. Jestliže $\liminf_{x \to z} u(x) > -\infty$ pro každé $z \in \partial U$, je funkce

$$z \mapsto \liminf_{x \to z} u(x), \qquad z \in \overline{U},$$

na $\overline{U}$ zdola polospojitá. Protože ∂U je kompaktní, existuje podle (2.1.1) $y \in \partial U$ tak, že

$$\liminf_{x \to y} u(x) = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial U\} = \inf v(U).$$

□

Zavedeme ještě jednu definici. Pro funkci $u : X \to \mathbb{R}^*$ definujeme *dolní regularizaci*

$$\hat{u} : x \mapsto \liminf_{y \to x} u(y).$$

Snadno se nahlédne, že pokud $\hat{u} > -\infty$, je funkce $\hat{u}$ zdola polospojitá, $\hat{u} \leq u$ a $v \leq \hat{u}$, kdykoli v je zdola polospojitá minoranta funkce u.

2.2 Vlastnosti hyperharmonických funkcí

Stejně jako v kapitole 1 budeme předpokládat, že pro dimenzi prostoru $\mathbb{R}^m$ platí $m > 1$.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u : U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že funkce u je *hyperharmonická* (na U), jestliže je na U zdola polospojitá a

$$u(a) \geq \int u \, d\sigma_{a,r},$$

kdykoli $\overline{B_r(a)} \subset U$. Funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ se nazývá *hypoharmonická* (na U), jestliže funkce $-u$ je hyperharmonická.

Množinu všech funkcí, které jsou hyperharmonické na U, budeme značit $\mathcal{H}^*(U)$.

2.2.1. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Potom $\mathcal{H}^*(U)$ je* min-*stabilní konvexní kužel,*

$$\mathcal{H}^*(U) \cap (-\mathcal{H}^*(U)) = \mathcal{H}(U).$$

Je-li $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ nahoru filtrující, potom $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*(U)$.

Důkaz. První dvě tvrzení vyplývají ihned z definice.

Je-li $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$, je $\sup \mathcal{F}$ zdola polospojitá. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Podle (2.1.7) je

$$\int (\sup \mathcal{F}) \, d\sigma_{a,r} = \sup \left\{ \int u \, d\sigma_{a,r}; u \in \mathcal{F} \right\} \leq \sup \{u(a); u \in \mathcal{F}\} = (\sup \mathcal{F})(a).$$

□

2.2.2. Lemma. *Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $R > 0$ a nechť funkce $u : B_R(a) \to \mathbb{R}^*$ má jednu z následujících vlastností:*

(∗) *u je zdola polospojitá na $B_R(a)$ a pro každé $x \in B_R(a)$ existuje posloupnost $(r(n))$ kladných čísel taková, že $r(n) + |x - a| < R$, $r(n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$u(x) \geq \int u \, d\sigma_{x,r(n)};$$

(∗∗) *u je zdola polospojitá na $B_R(a)$ a pro každé $x \in B_R(a)$ existuje posloupnost $(r(n))$ kladných čísel taková, že $r(n) + |x - a| < R$, $r(n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$u(x) \geq \int u \, d\lambda_{x,r(n)}.$$

Potom u splňuje na $B_R(a)$ ostrý princip minima.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $b \in B_R(a)$ tak, že $u(b) = \inf u(B_R(a))$. Označme

$$M = \{x \in B_R(a); u(x) = u(b)\}.$$

Dokážeme, že $M = B_R(a)$.

Protože $M = \{x \in B_R(a); u(x) \leq u(b)\}$, je $M \neq \emptyset$ uzavřená podmnožina v $B_R(a)$. Ukážeme, že předpoklad $M \neq B_R(a)$ vede ke sporu. Důležité povšimnutí přitom bude, že pak existuje $x \in \partial M \cap B_R(a)$ takový, že $\sigma_{x,r}(S_r(x) \setminus M) > 0$ (resp. $\lambda_{x,r}(B_r(x) \setminus M) > 0$) pro všechna dostatečně malá kladná r.

Je-li $M \neq B_R(a)$, existuje $z \in \partial M \cap B_R(a)$. Zvolme $\varrho > 0$ tak, aby $B_{3\varrho}(z) \subset B_R(a)$ a dále zvolme $y \in B_\varrho(z) \setminus M$. Protože $\overline{M}$ je uzavřená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^m$, existuje $x \in \overline{M}$ tak, že

$$B_{|x-y|}(y) \cap M = \emptyset.$$

Platí $|y-x| \leq |y-z| < \varrho$, takže $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < 2\varrho$. Vidíme, že

$$x \in \overline{M} \cap B_{2\varrho}(z) \subset \overline{M} \cap B_R(a) = M.$$

Je-li $s \in B_{|x-y|}(x)$, platí

$$|s-z| \leq |s-x| + |x-z| < |x-y| + |x-z| < 3\varrho,$$

tedy $B_{|x-y|}(x) \subset B_{3\varrho}(z) \subset B_R(a)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $r(n)$ z podmínky $(*)$ (resp. $(**)$) splňovalo $r(n) < |x-y|$. Platí tedy na jedné straně $u(x) = u(b)$, neboť $x \in M$, na druhé straně

$$u(x) \geq \int u\, d\sigma_{x,r(n)} > u(b) \text{ (resp. } u(x) \geq \int u\, d\lambda_{x,r(n)} > u(b)),$$

neboť $u > u(b)$ na $S_{r(n)}(x) \cap B_{|x-y|}(y)$, což je neprázdná otevřená množina v $S_{r(n)}(x)$ (resp. na $B_{r(n)}(x) \cap B_{|x-y|}(y)$, což je neprázdná otevřená množina). Odvodili jsme spor, tudíž $M = B_R(a)$. ☐

2.2.3. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Potom je buďto $u = \inf u(U)$ na U, nebo $u > \inf u(U)$ na U.*

Důkaz. Podle (2.2.2) splňuje u na U lokálně ostrý princip minima. Tvrzení vyplývá z (2.1.9). ☐

2.2.4. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a nechť $\partial^* U$ značí hranici množiny U jako podmnožiny jednobodové kompaktifikace prostoru $\mathbb{R}^m$. Potom*

$$\inf u(U) = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* U\}.$$

Důkaz. Budeme aplikovat (2.1.10), X bude jednobodová kompaktifikace prostoru $\mathbb{R}^m$.

Označme

$$c = \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* U\}.$$

Zřejmě $\inf u(U) \leq c$. Předpokládejme, že existuje $y \in U$ tak, že $u(y) < c$. Nechť V je komponenta množiny U obsahující bod y. Poznamenejme, že $\partial^* V \neq \emptyset$. Potom

$$u(y) < c \leq \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* V\},$$

takže

$$\inf u(V) < \inf\{\liminf_{x \to z} u(x); z \in \partial^* V\},$$

což je ve sporu s (2.1.10). Platí tedy $\inf u(U) \geq c$. ☐

2.2.5. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u : U \to \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *$u \in \mathcal{H}^*(U)$;*

(ii) *u je zdola polospojitá na U a $u(a) \geq \int u\, d\lambda_{a,r}$, kdykoli $\overline{B_r(a)} \subset U$;*

(iii) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každé* $x \in U$ *existuje posloupnost* $(r(n))$ *kladných čísel taková, že* $\overline{B_{r(n)}(x)} \subset U$, $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$u(x) \geq \int u \, d\sigma_{x,r(n)};$$

(iv) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každé* $x \in U$ *existuje posloupnost* $(r(n))$ *kladných čísel taková, že* $\overline{B_{r(n)}(x)} \subset U$, $r(n) \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$u(x) \geq \int u \, d\lambda_{x,r(n)};$$

(v) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každou omezenou otevřenou množinu* $V \subset \overline{V} \subset U$ *a každou funkci* $f \in \mathcal{C}(\overline{V})$, *pro niž* $f|_V \in \mathcal{H}(V)$ *a* $f \leq u$ *na* ∂V, *platí* $f \leq u$ *na* V;

(vi) *u je zdola polospojitá na* U *a pro každou kouli* $B_r(a)$, *pro niž* $\overline{B_r(a)} \subset U$, *platí* $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$.

Důkaz. Nechť platí (i). Potom u je zdola polospojitá na U. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Pro každé $\alpha \in \,]0,1[$ platí

$$\int u \, d\sigma_{a,\alpha r} \leq u(a).$$

Podle (2.1.8) dostáváme

$$\int u \, d\lambda_{a,r} = m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha r} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha \leq u(a) \cdot m \int_0^1 \alpha^{m-1} \, d\alpha = u(a).$$

Platí tedy (ii).

Zřejmě (ii)⇒(iv). Předpokládejme (iv) a nechť u, V a f jsou jako v (v). Můžeme předpokládat, že V je neprázdná a souvislá. Funkce $v = u - f$ splňuje podle (1.5.3) a (2.2.2) na V lokálně ostrý princip minima a pro každé $z \in \partial V$ je

$$\liminf_{x \to z, \, x \in V} v(x) \geq 0.$$

Podle (2.1.10) (za X volíme $\overline{V}$) je $v \geq 0$ na V a platí tudíž (v).

Nechť platí (v) a u a $B_r(a)$ jsou jako v (vi). Je-li $f \in \mathcal{C}(S_r(a))$, $f \leq u|_{S_r(a)}$, pak podle (v) je $H_{a,r} f \leq u$ na $B_r(a)$. Odtud snadno plyne podle (2.1.5) nerovnost $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$ na $B_r(a)$.

Zřejmá je implikace (vi)⇒(i). Zatím jsme vynechali (iii).

Zřejmě (i)⇒(iii) a implikace (iii)⇒(v) se dokáže na základě (2.2.2) podobně, jako (iv)⇒(v). □

2.2.6. Příklady. Předpokládejme, že $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina.

(a) Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom $-|h| \in \mathcal{H}^*(U)$, neboť $-|h| = \min(h, -h)$.

(b) Případ $m = 2$. Nechť f je holomorfní funkce na oblasti U. Označme

$$M = \{z \in U; f(z) = 0\}$$

a předpokládejme, že $M \neq U$. (Pak M je izolovaná podmnožina U.) Definujme

$$u = \begin{cases} \log(1/|f|) & \text{na } U \setminus M, \\ \infty & \text{na } M. \end{cases}$$

Potom $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Snadno nahlédneme, že u je zdola polospojitá na U, dále pro $a \in M$ je nerovnost

$$u(a) \geq \int u \, d\sigma_{a,r}$$

zřejmá pro všechna r, pro něž $\overline{B_r(a)} \subset U$. Je-li $a \in U \setminus M$, existuje $R > 0$ tak, že platí $M \cap B_R(a) = \emptyset$. Na $B_R(a)$ je $f \neq 0$, takže existuje holomorfní funkce g na $B_R(a)$, pro niž $f = \exp g$. Potom $|f| = \exp(\operatorname{Re} g)$ a

$$u = \log \frac{1}{|f|} = -\operatorname{Re} g \in \mathcal{H}(B_R(a))$$

podle (1.1.1 (c)). Pro každé $\varrho \in \,]0, R[$ platí proto

$$u(a) = \int u \, d\sigma_{a,\varrho}.$$

Podle (2.2.5) je $u \in \mathcal{H}^*(U)$.

(c) Připomeňme, že jsme v (1.9) definovali pro $t > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2, \\ \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2 \end{cases}$$

a $p(0) = \infty$. Tvrdíme, že funkce $u : x \mapsto p(|x|)$ je na $\mathbb{R}^m$ hyperharmonická. Pro $m = 2$ to plyne z (b). Nechť $m > 2$. Víme z (1.1.1 (d)), že u je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Nerovnost

$$u(0) \geq \int u \, d\sigma_{0,r}$$

pro každé $r > 0$ je zřejmá. Je-li $a \neq 0$ a $r \in \,]\,0, |a|\,[$, pak

$$u(a) = \int u \, d\sigma_{a,r}$$

podle (1.5.2). Protože u je zdola polospojitá, je u hyperharmonická podle (2.2.5).

(d) Připomeňme ještě, že v (1.9) jsme definovali

$$N(x, y) = p(|x - y|), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, tj. nezáporná borelovská míra taková, že $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \mathbb{R}^m$. V případě $m = 2$ navíc předpokládejme, že nosič $\operatorname{spt}(\mu)$ míry μ je kompaktní. Definujme

$$N\mu : x \mapsto \int N(x, y) \, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

(Funkce $N\mu$ se v případě $m = 2$ nazývá *logaritmický potenciál míry* μ a v případě $m > 2$ *Newtonův potenciál míry* μ.)

Tvrdíme: $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$. To lze dokázat např. takto: nejprve předpokládejme, že μ má kompaktní nosič. Pro $c \in \mathbb{R}$ definujme na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ funkci $N^{(c)} = \min(N, c)$, takže $N^{(c)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ Potom je ovšem funkce

$$F^{(c)} : x \mapsto \int N^{(c)}(x, y) \, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m,$$

spojitá na $\mathbb{R}^m$ a

$$N\mu = \sup\{F^{(c)}; c \in \mathbb{R}\}.$$

Tudíž $N\mu$ je zdola polospojitá na $\mathbb{R}^m$. Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$. Jelikož je pro každé $y \in \mathbb{R}^m$ funkce $x \mapsto N^{(c)}(x,y)$ hyperharmonická na $\mathbb{R}^m$, je podle (2.2.5)

$$\int F^{(c)}\, d\lambda_{a,r} = \int \Big(\int_{S(\mu)} N^{(c)}(x,y)\, d\mu(y) \Big)\, d\lambda_{a,r}(x) =$$

$$= \int_{S(\mu)} \Big(\int N^{(c)}(x,y)\, d\lambda_{a,r}(x) \Big)\, d\mu(y) \le \int_{S(\mu)} N^{(c)}(a,y)\, d\mu(y) = F^{(c)}(a) \le N\mu(a).$$

Odtud podle (2.1.7) plyne, že

$$\int N\mu\, d\lambda_{a,r} \le N\mu(a),$$

takže podle (2.2.5) je $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$.

Je-li $m > 2$ a μ je Radonova míra (ne nutně s kompaktním nosičem), definujeme pro $R > 0$ míru $\mu_R = \mu|_{B_R(0)}$. Protože

$$N\mu_R \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m) \qquad \text{a} \qquad N\mu = \sup\{N\mu_R; R > 0\},$$

je podle (2.2.1) také $N\mu \in \mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$.

(e) Nechť $u \in \mathcal{C}^2(U)$. Potom $u \in \mathcal{H}^*(U)$, právě když $\Delta u \le 0$ na U. Důkaz není obtížný: Nechť nejprve $\Delta u \le 0$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$. Definujme na $B_r(a)$ funkci

$$v = u - H_{a,r}(u|_{S_r(a)}).$$

Pak $v \in \mathcal{C}^2(B_r(a))$, $\Delta v = \Delta u \le 0$ na $B_r(a)$ a

$$\lim_{x \to z} v(x) = u(z) - u(z) = 0$$

pro všechna $z \in S_r(a)$. Podle (1.2.1) je $v \ge 0$ na $B_r(a)$, takže $v \in \mathcal{H}^*(U)$ podle (2.2.5).

Je-li $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $V = \{x \in U; \Delta u > 0\}$, je V otevřená množina. Protože $\Delta(-u) < 0$ na V, je podle první části důkazu $-u \in \mathcal{H}^*(V)$, tudíž platí $u \in \mathcal{H}(V)$, neboli $\Delta u = 0$ na V. Odtud plyne, že $V = \emptyset$ a tudíž $\Delta u \le 0$ na U.

(f) Nechť $V \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $M \subset V$ spočetná a nechť $x \in V \setminus M$. Pak existuje $v \in \mathcal{H}^*(V)$ tak, že $v(x) < \infty$ a $v = \infty$ na M. Skutečně, pro $y \in M$ zvolíme $d_y \in \mathbb{R}$ tak, aby $N_y + d_y \ge 0$ na V a dále zvolíme $c_y > 0$ tak, aby

$$\sum_{y \in M} c_y(N_y(x) + d_y) < \infty.$$

Potom funkce

$$v = \sum_{y \in M} c_y(N_y + d_y)$$

má požadované vlastnosti. Je-li $x \in \overline{M}$ a $c > v(x)$, pak $u = \min(v,c)$ je omezená hyperharmonická funkce, která není v bodě x spojitá.

(g) Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina, $\mu = \lambda|_K$. Potom je $N\mu$ spojitá superharmonická funkce. Skutečně, pro $x \in \mathbb{R}^m$ je $N\mu(x) = \int N_x d\mu = \int p(|y-x|)\, 1_K(y) d\lambda(y) = \int p(|w|)\, 1_K(x+w) d\lambda(w) = \int N_0 \cdot 1_{K-x} d\lambda$. Nyní je spojitost zřejmá s odvoláním na Lebesgueovu větu, neboť $N_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

(h) Nechť $v : x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}^m$. Potom $v \in -\mathcal{H}^*(\mathbb{R}^m)$. Pro $a \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ dokážeme nerovnost $\int v d\sigma_{a,r} \geq v(a)$ takto: pro $x \in \mathbb{R}^m$ označme $\varphi(x) = 2a - x$. Platí

$$\begin{aligned} 2\int v d\sigma_{a,r} =& 2\int |x| d\sigma_{a,r}(x) = \int |x| d\sigma_{a,r}(x) + \int |x| d\sigma_{a,r}(x) = \\ &= \int |x| d\sigma_{a,r}(x) + \int |\varphi(x)| d\sigma_{a,r}(x) = \int \big(|x| + |\varphi(x)|\big) d\sigma_{a,r}(x) \geq \\ &\geq \int |x + \varphi(x)| d\sigma_{a,r}(x) = \int 2|a| d\sigma_{a,r} = 2|a| = 2v(a). \end{aligned}$$

Je možné také uvažovat např. takto: $\Delta v \geq 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a nerovnost $\int v d\sigma_{0,r} \geq v(0) = 0$ je zřejmá pro každé $r > 0$.

(i) Nechť $m > 2$ a $u_n = (1/n)N_0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom (u_n) je klesající posloupnost hyperharmonických funkcí a $\inf\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ není zdola polospojitá (a tudíž není hyperharmonická). (Srv. s (2.2.8).)

2.2.7. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ je zdola omezená. Nechť $M \subset \partial U$ je spočetná množina a nechť*

$$\liminf_{y \to z} u(y) \geq 0$$

pro všechna $z \in \partial U \setminus M$. Potom $u \geq 0$ na U.

Důkaz. Zvolme otevřenou omezenou množinu $V \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{U} \subset V$, dále zvolme $x \in U$, $\varepsilon > 0$ a $v \in \mathcal{H}^*(V)$ tak, aby $v = \infty$ na M a $v(x) < \varepsilon$; viz (2.2.6 (f)). Definujme na U funkci $w = u + v$. Pak

$$\liminf_{y \to z} w(y) \geq 0$$

pro každé $z \in \partial U$, tedy podle (2.2.4) platí $w \geq 0$ na U. Odtud $u(x) > -\varepsilon$. □

2.2.8. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a nechť $\mathcal{F}$ je lokálně zdola omezená množina hyperharmonických funkcí na U, $u = \inf \mathcal{F}$. Potom je $\hat{u} \in \mathcal{H}^*(U)$.*

Důkaz. Zřejmě je $\hat{u} > -\infty$ a víme, že $\hat{u}$ je zdola polospojitá. Nechť V je omezená otevřená množina, $\overline{V} \subset U$, $f \in \mathcal{C}(\overline{V})$, $f|_V \in \mathcal{H}(V)$ a $f \leq \hat{u}$ na ∂V. Protože $\hat{u} \leq u$, je podle (2.2.5) $v \geq f$ na V pro každou funkci $v \in \mathcal{F}$, takže $u \geq f$ na V. Protože f je na V spojitá, je $\hat{f} = f$ na V, tudíž $\hat{u} \geq \hat{f} = f$ na V. Nyní opět aplikujeme (2.2.5). □

2.2.9. Věta. *Nechť $u \in \mathcal{H}^*(B_r(a))$. Potom jsou funkce*

$$\varrho \mapsto \int u \, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \mapsto \int u \, d\lambda_{a,\varrho}$$

nerostoucí na $]0, r[$ a

$$\int u \, d\sigma_{a,\varrho} \to u(a), \qquad \int u \, d\lambda_{a,\varrho} \to u(a)$$

pro $\varrho \to 0+$.

Důkaz. Zvolme $0 < s < t < r$ a funkci $f \in \mathcal{C}(S_t(a))$, $f \le u$ na $S_t(a)$. Podle (2.2.5) je $H_{a,t} f \le u$ na $B_t(a)$ a tudíž

$$\int f \, d\sigma_{a,t} = H_{a,t} f(a) = \int H_{a,t} f \, d\sigma_{a,s} \le \int u \, d\sigma_{a,s}.$$

Odtud podle (2.1.5) dostáváme

$$\int u \, d\sigma_{a,t} \le \int u \, d\sigma_{a,s}.$$

Pro každé $\alpha \in]0,1[$ je tedy

$$\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \le \int u \, d\sigma_{a,\alpha s},$$

tedy podle (2.1.8) je

$$\int u \, d\lambda_{a,t} = m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha t} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha \le m \int_0^1 \Big(\int u \, d\sigma_{a,\alpha s} \Big) \alpha^{m-1} \, d\alpha = \int u \, d\lambda_{a,s}.$$

Nechť $c < u(a)$. Protože u je zdola polospojitá v bodě a, existuje $\tau \in]0, r[$ tak, že $u > c$ na $B_\tau(a)$. Pro každé $\varrho \in]0, \tau[$ je pak

$$c \le \int u \, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad c \le \int u \, d\lambda_{a,\varrho}.$$

Dostáváme

$$c \le \sup \{ \int u \, d\sigma_{a,\varrho}; \varrho \in]0, r[\} = \lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\sigma_{a,\varrho} \le u(a),$$

takže

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\sigma_{a,\varrho} = u(a).$$

Podobně

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int u \, d\lambda_{a,\varrho} = u(a).$$

□

2.2.10. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $a \in U$. Potom*

$$u(a) = \liminf_{x \to a, x \ne a} u(x).$$

2.2.11. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u, v \in \mathcal{H}^*(U)$. Jestliže $u \le v$ λ–skoro všude na U, pak $u \le v$ všude na U.*

Důkaz. Zřejmě

$$\int u \, d\lambda_{a,\varrho} \le \int v \, d\lambda_{a,\varrho},$$

kdykoli $\overline{B_\varrho(a)} \subset U$. Tvrzení plyne z (2.2.9). □

2.3 Superharmonické funkce

2.3.1. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je oblast, $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Potom buďto $u = \infty$ na U, nebo $u \in L^1_{loc}(U)$ (tj. u je na U lokálně lebesgueovsky integrovatelná).*

Důkaz. Označme M množinu všech bodů z U, pro něž existuje okolí, na němž je u integrovatelná. Zřejmě je M otevřená množina. Nechť $a \in U \setminus M$, $r > 0$ a nechť $\overline{B_{2r}(a)} \subset U$. Pak

$$\infty = \int u \, d\lambda_{a,2r} \leq u(a).$$

Je tedy $u = \infty$ na $U \setminus M$.

Zvolme $x \in B_r(a)$ a $\varrho > 0$ tak, aby $B_\varrho(a) \subset B_r(x)$. Jelikož $a \notin M$, je

$$\int_{B_\varrho(a)} u \, d\lambda = \infty.$$

Protože u je na $\overline{B_{2r}(a)}$ zdola omezená, je

$$\int_{B_r(x)} u \, d\lambda = \infty,$$

takže

$$\infty = \int u \, d\lambda_{x,r} \leq u(x),$$

neboť $u = \infty$ na $B_r(a)$. Vidíme, že $B_r(a) \subset U \setminus M$ a tedy také $U \setminus M$ je otevřená množina. Odtud plyne, že buďto $M = U$ (pak $u \in L^1_{loc}(U)$ nebo $M = \emptyset$ (pak $u = \infty$ na U). □

2.3.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$u \in L^1_{loc}(U)$;*

(ii) *$u < \infty$ na U λ–skoro všude;*

(iii) *$u < \infty$ na husté podmnožině množiny U;*

(iv) *v každé komponentě množiny U existuje bod, v němž u má konečnou hodnotu.*

Důkaz. Implikace (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv) jsou zřejmé. Pro důkaz (iv)⇒(i) se užije (2.3.1). □

Zavedeme následující definici. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Říkáme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ je *superharmonická* (na U), jestliže $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a platí některá z podmínek uvedených v (2.3.2).

Množina všech superharmonických funkcí na U označíme $\mathcal{S}(U)$, $\mathcal{S}^+(U)$ značí množinu nezáporných funkcí z $\mathcal{S}(U)$. Prvkům množiny $-\mathcal{S}(U)$ se říká *subharmonické* funkce na U.

2.3.3. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$. Jestliže $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \in \mathcal{H}(B_r(a))$. Speciálně funkce u je $\sigma_{a,r}$–integrovatelná.*

Důkaz. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset U$. Podle (2.2.5) je $H_{a,r}(u|_{S_r(a)}) \leq u$ na $B_r(a)$, tedy podle (2.3.2) je funkce $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ konečná na husté podmnožině $B_r(a)$. Podle (2.1.5) je $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ supremem nahoru filtrující množiny

$$\{H_{a,r}f; f \in \mathcal{C}(S_r(a)), f \leq u|_{S_r(a)}\}$$

harmonických funkcí. Podle (1.8.2) je tudíž $H_{a,r}(u|_{S_r(a)})$ harmonická na $B_r(a)$. Speciálně

$$\int u\, d\sigma_{a,r} = H_{a,r}(u|_{S_r(a)})(a) < \infty.$$

□

2.3.4. Tvrzení. *Nechť μ je Radonova míra s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}^m$. Potom funkce $N\mu$ leží v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$.*

Důkaz. Funkce $N\mu$ je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Nechť $\overline{B_r(a)} \subset \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Potom

$$\int N\mu\, d\sigma_{a,r} = \int \Big(\int_{\operatorname{spt}(\mu)} N(x,y)\, d\mu(y) \Big)\, d\sigma_{a,r}(x) = \int_{\operatorname{spt}(\mu)} \Big(\int N(x,y)\, d\sigma_{a,r}(x) \Big)\, d\mu(y).$$

Pro každé $y \in \operatorname{spt}(\mu)$ je funkce $x \mapsto N(x,y)$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, tedy poslední integrál je roven

$$\int N(a,y)\, d\mu(y) = N\mu(a).$$

Podle (1.6.1) je funkce $N\mu$ harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$.

Protože $N\mu$ je podle (2.2.6 (d)) hyperharmonická funkce na $\mathbb{R}^m$ a je konečná všude na množině $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu) \neq \emptyset$, je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ podle (2.3.2). □

2.3.5. Lemma. *Nechť $m > 2$ a $R > 0$. Potom*

$$N\sigma_{0,R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m} & \text{na } \overline{B_R(0)} \\ N_0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus \overline{B_R(0)}. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť $x \notin \overline{B_R(0)}$. Protože funkce $y \mapsto N(x,y)$ je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$, je podle (1.6.1)

$$N\sigma_{0,R}(x) = \int N(x,y)\, d\sigma_{0,R}(y) = N(0,x) = N_0(x).$$

Je-li $z \in S_R(0)$, je podle (2.3.3) funkce N_z $\sigma_{0,R}$–integrovatelná. Je-li $t \geq 1$ a $y \in S_R(0)$, pak $N(tz,y) \leq N(z,y)$ a z Lebesgueovy věty dostáváme

$$N\sigma_{0,R}(z) = \lim_{t \to 1+} N_0(tz) = \frac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m}.$$

Protože je funkce $N\sigma_{0,R}$ zdola polospojitá, platí

$$\liminf_{x \to z, x \in B_R(0)} N\sigma_{0,R}(x) \geq \frac{1}{\omega(m-2)} R^{2-m}.$$

Podle (2.3.4) je funkce $N\sigma_{0,R}$ harmonická na $B_R(0)$ a tudíž podle (1.2.1) je na $B_r(0)$

$$N\sigma_{0,R} \geq \frac{1}{\omega(m-2)} R^{m-2},$$

což je hodnota funkce $N\sigma_{0,R}$ v bodě 0. Z (1.5.3) plyne, že $N\sigma_{0,R}$ je na $B_R(0)$ konstantní. □

2.3.6. Věta. *Nechť $m > 2$ a nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$. Potom $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, právě když*

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu(x) < \infty.$$

Podmínka $(*)$ je ekvivalentní s podmínkou

$$(**) \qquad \int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty.$$

Důkaz. Podle (2.3.5)

$$\int N\mu\, d\sigma_{0,1} = \int N\sigma_{0,1}\, d\mu = \int_{B_1(0)} N\sigma_{0,1}\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} N\sigma_{0,1}\, d\mu = \\ = \frac{1}{\omega(m-2)} \left(\mu(B_1(0)) + \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu \right).$$

Protože $\mu(B_1(0)) < \infty$, je $(*)$ ekvivalentní s integrovatelností $N\mu$ vzhledem k $\sigma_{0,1}$. Je-li $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, platí $(*)$ podle (2.3.3). Jestliže $N\mu \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, je podle (2.2.6 (d)) a (2.3.2) $N\mu = \infty$ na $\mathbb{R}^m$ a tudíž $(*)$ neplatí.

Označme

$$A = \{(x,t) \in (\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)) \times [0,\infty[\ ;\ 0 \le t \le |x|^{2-m}\}$$

a nechť λ^1 značí Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}$. Protože A je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, je $(\mu \times \lambda^1)$–měřitelná a tedy podle Fubiniovy věty

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\, d\mu(x) = (\mu \times \lambda^1)(A) = \int \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\}\right)\, d\lambda^1(t) = \\ = \int_0^1 \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\}\right)\, dt.$$

Zřejmě pro $t \in\ ]0,1[$ platí

$$\{x \in \mathbb{R}^m \setminus B_1(0); |x|^{2-m} > t\} = B_{t^{1/(2-m)}}(0) \setminus B_1(0)$$

a po substituci $r = t^{1/(2-m)}$ se poslední integrál rovná

$$(m-2) \int_1^\infty \mu(B_r(0) \setminus B_1(0)) r^{1-m}\, dr.$$

Protože $m > 2$, je

$$\int_1^\infty \mu(B_1(0)) r^{1-m}\, dr < \infty,$$

tudíž $(*)$ platí, právě když platí $(**)$. $\square$

2.4 Nasycené množiny hyperharmonických funkcí

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a nechť pro $V = B_r(a)$ platí $\overline{V} \subset U$. Definujme

$$u_V = \begin{cases} u & \text{na } U \setminus V, \\ H_{a,r}(u|_{\partial V}) & \text{na } V. \end{cases}$$

Funkce u_V se nazývá *Poissonova modifikace* funkce u vzhledem k V. Z (2.3.1), (2.3.2) a (2.3.3) plyne, že buďto $u_V = \infty$ na V, nebo u_V je na V harmonická.

2.4.1. Věta. *Platí* $u_V \in \mathcal{H}^*(U)$ *a* $u_V \le u$.

Důkaz. Podle (2.2.5) je $u_V \le u$. Pro $f \in \mathcal{C}(\partial V)$ definujme $h_f = f$ na ∂V a $h_f = H_{a,r}f$ na V. Pak $h_f \in \mathcal{C}(\overline{V})$ a podle (2.1.5) platí na $\overline{V}$ rovnost

$$u_V = \sup\{h_f; f \in \mathcal{C}(\partial V), f \le u|_{\partial V}\}.$$

Funkce $(u_V)|_{\overline{V}}$ je tudíž zdola polospojitá. Funkce u_V je zřejmě zdola polospojitá v každém bodě z $U \setminus \overline{V}$. Nechť $z \in \partial V$. Pak

$$u_V(z) = \liminf_{x \to z, x \in \overline{V}} u_V(x),$$

neboť funkce $(u_V)|_{\overline{V}}$ je zdola polospojitá v bodě z. Protože funkce u je zdola polospojitá v bodě z, platí

$$u_V(z) = u(z) = \liminf_{x \to z} u(x) \le \liminf_{x \to z, x \in U \setminus \overline{V}} u(x) = \liminf_{x \to z, x \in U \setminus \overline{V}} u_V(x).$$

Odtud snadno plyne, že $u_V(z) = \liminf_{x \to z} u_V(x)$. Dokázali jsme, že funkce u_V je zdola polospojitá.

Nerovnost

$$\int u_V \, d\sigma_{b,\varrho} \le u(b)$$

je zřejmá, pokud buďto $\overline{B_\varrho(b)} \subset V$ nebo $\overline{B_\varrho(b)} \subset U \setminus \overline{V}$. Nechť $b \in \partial V$ a $\overline{B_\varrho(b)} \subset U$. Potom

$$\int u_V \, d\sigma_{b,\varrho} \le \int u \, d\sigma_{b,\varrho} \le u(b) = u_V(b).$$

Podle (2.2.5) je $u_V \in \mathcal{H}^*(U)$. □

2.4.2. Korolár. *Je-li* $u \in \mathcal{S}(U)$, *je* $u_V \in \mathcal{S}(U)$.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$. Říkáme, že $\mathcal{F}$ je *nasycená*, jestliže $\mathcal{F}$ je min-stabilní a $u_V \in \mathcal{F}$, kdykoli $u \in \mathcal{F}$ a $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$.

2.4.3. Věta. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřená množina,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ *je nasycená,* $u = \inf \mathcal{F}$ *a* W *je komponenta množiny* U. *Potom buďto* $u = \infty$ *na* W, *nebo* $u = -\infty$ *na* W, *nebo* $u|_W \in \mathcal{H}(W)$.

Důkaz. Volme $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$. Platí

$$u = \inf\{v_V; v \in \mathcal{F}\},$$

neboť $v_V \in \mathcal{F}$, kdykoli $v \in \mathcal{F}$. Zřejmě je množina $\{v_V; v \in \mathcal{F}\}$ dolů filtrující, neboť $\mathcal{F}$ je min-stabilní. Z (2.3.3) a (1.8.2) snadno plyne, že u je na V buďto rovna ∞, nebo je na V rovna $-\infty$, nebo je na V harmonická.

Označme

$$W_1 = \{x \in W; u(x) = \infty\}, \quad W_2 = \{x \in W; u(x) = -\infty\}, \quad W_3 = \{x \in W; u(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Potom jsou množiny W_1, W_2, W_3 otevřené, $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ a funkce u je na W_3 harmonická. Tvrzení věty je nyní důsledkem souvislosti množiny W. □

2.4.4. Korolár. *Nechť* $v \in \mathcal{S}(U)$, $w \in -\mathcal{S}(U)$ *a nechť* $\emptyset \ne \mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ *je nasycená množina taková, že* $w \le u \le v$ *pro každou funkci* $u \in \mathcal{F}$. *Potom* $\inf \mathcal{F} \in \mathcal{H}(U)$.

Důkaz. Na husté podmnožině U platí podle (2.3.2)

$$-\infty < \inf \mathcal{F} < \infty.$$

Tvrzení plyne z (2.4.3). $\square$

2.4.5. Korolár. *Nechť* $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{S}(U)$ *a nechť*

$$\mathcal{T} = \{t; t \in -\mathcal{S}(U), t \leq s \text{ kdykoli } s \in \mathcal{S}\} \neq \emptyset.$$

Potom $\sup \mathcal{T} \in \mathcal{H}(U)$. *Jinak řečeno: existuje největší subharmonická minoranta množiny* $\mathcal{S}$ *a je harmonická.*

Důkaz. Je-li $t \in \mathcal{T}$, $s \in \mathcal{S}$ a $\overline{B_r(a)} \subset U$, pak z (2.2.5) plyne

$$H_{a,r}(t|_{S_r(a)}) \leq H_{a,r}(s|_{S_r(a)}) \leq s$$

na V, tedy $-\mathcal{T} \subset \mathcal{S}(U)$ je zřejmě nasycená množina. Tvrzení plyne z (2.4.4). $\square$

2.4.6. Věta. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřená množina,*

$$\mathcal{R}(U) = \{h - k; h, k \in \mathcal{H}^+(U)\}.$$

Potom je $\mathcal{R}(U)$ *vzhledem k přirozenému uspořádání dedekindovsky úplný vektorový svaz.*

Důkaz. Nechť $h_j, k_j \in \mathcal{H}^+(U)$, $d_j = h_j - k_j$, $j \in \{1, 2\}$. Je-li

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{S}(U); s \geq d_1, s \geq d_2\},$$

je $\mathcal{F}$ min-stabilní, $h_1 + h_2 \in \mathcal{F}$ a pro $V = B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset U$ a $s \in \mathcal{F}$ je

$$s_V \geq (d_j)_V = d_j, \qquad j \in \{1, 2\}.$$

Je tedy $\mathcal{F}$ nasycená množina a podle (2.4.4) je $d_0 = \inf \mathcal{F} \in \mathcal{H}(U)$, neboť $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}(U)$ a $d_0 \geq -(k_1 + k_2)$. Zřejmě je d_0 nejmenší harmonická funkce, pro niž $d_0 \geq d_1$, $d_0 \geq d_2$. Protože

$$d_0 = d_0 - d_1 + d_1 = d_0 - d_1 + h_1 - k_1$$

je rozdílem nezáporných harmonických funkcí $d_0 - d_1 + h_1$ a k_1, je $d_0 \in \mathcal{R}(U)$. Tudíž je $\mathcal{R}(U)$ vektorový svaz.

Nechť $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{R}(U)$ a nechť pro $d \in \mathcal{R}(U)$, $d = h - k$, $h, k \in \mathcal{H}^+(U)$, platí $d \leq g$, kdykoli $g \in \mathcal{G}$. Podle (2.4.5) existuje největší harmonická minoranta množiny $\mathcal{G}$; označme ji d_0. Zřejmě $d_0 \geq d$, tudíž

$$d_0 = d_0 - d + d = (d_0 - d + h) - k \in \mathcal{R}(U).$$

Je tedy d_0 infimem $\mathcal{G}$ v $\mathcal{R}(U)$. $\square$

2.5 Shlazování superharmonických funkcí

Nechť $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečně diferencovatelná sudá nezáporná funkce s nosičem v $[-1,1]$ a nechť

$$\omega \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\,d\varrho = 1.$$

(Připomínáme, že $\omega = \sigma(S_1(0))$; viz (1.5.1).) Potom podle (1.5.1)

$$\int \psi(|x|)\,d\lambda(x) = \lambda(B_1(0)) \int \psi(|x|)\,d\lambda_{0,1} =$$

$$= m\lambda(B_1(0)) \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\,d\varrho = \omega \int_0^1 \psi(\varrho)\varrho^{m-1}\,d\varrho = 1.$$

Pro $r > 0$ definujme

$$\beta_r(x) = r^{-m}\psi\left(\frac{|x|}{r}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Zřejmě $\beta_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, nosič funkce β_r je obsažený v $\overline{B_r(0)}$ a $\int \beta_r\,d\lambda = 1$.

Je-li $U \subset \mathbb{R}^m$ otevřená množina, označíme

$$U_r = \{x \in U; \overline{B_r(x)} \subset U\}.$$

Množina U_r je zřejmě otevřená.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $r > 0$, $f \in L^1_{loc}(U)$ a $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, jejíž nosič je obsažený v $\overline{B_r(0)}$. Konvoluci $\gamma * f$ definujeme rovností

$$(\gamma * f)(x) = \int f(y)\gamma(x-y)\,d\lambda(y), \qquad x \in U_r.$$

Zřejmě

$$(\gamma * f)(x) = \int_{B_r(x)} f(y)\gamma(x-y)\,d\lambda(y) = \int_{B_r(0)} f(x-y)\gamma(y)\,d\lambda(y).$$

Podle věty o derivování za integračním znamením je $\gamma * f \in \mathcal{C}^\infty(U_r)$, pokud $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Nechť $x \in U$ je Lebesgueovým bodem funkce $f \in L^1_{loc}(U)$, tj.

$$\lim_{s\to 0+} \int |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda_{0,s}(y) = 0.$$

Tvrdíme, že

$$\lim_{s\to 0+} (\beta_s * f)(x) = f(x).$$

Je-li totiž $M = \sup \psi(\mathbb{R})$ a $s > 0$ takové, že $x \in U_s$, pak

$$|(\beta_s * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{B_s(0)} (f(x-y) - f(x))\beta_s(y)\,d\lambda(y) \right| \leq$$

$$\leq Ms^{-m} \int_{B_s(0)} |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda(y) = M\lambda(B_1(0)) \int |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda_{0,s}(y).$$

2.5.1. Tvrzení. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$ a $r > 0$. Potom je*

$$\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r) \cap \mathcal{C}^\infty(U_r)$$

a $\beta_r * u \nearrow u$ na U pro $r \to 0+$.

Důkaz. Nechť $r > 0$, $x \in U_r$. Připomeňme, že $\lambda(B_r(x)) = (\omega/m)\, r^m$ a povšimněme si, že funkce

$$y \mapsto u(y)\beta_r(x-y)$$

je na $\overline{B_r(x)}$ zdola polospojitá (to např. snadno plyne z (2.1.4)). Podle (2.1.8) dostáváme

$$(\beta_r * u)(x) = \frac{\omega}{m} r^m \int u(y)\beta_r(x-y)\, d\lambda_{x,r}(y) =$$

$$= \omega r^m \int_0^1 \Big(\int u(y)\beta_r(x-y)\, d\sigma_{x,\alpha r}(y) \Big) \alpha^{m-1}\, d\alpha = \omega \int_0^1 \alpha^{m-1}\psi(\alpha) \Big(\int u\, d\sigma_{x,\alpha r} \Big)\, d\alpha.$$

Podle (2.2.9) je pro každé $\alpha \in \,]0,1[$ funkce

$$\varrho \mapsto \int u\, d\sigma_{x,\alpha\varrho}$$

nerostoucí na intervalu $]0,r[$ s limitou $u(x)$ pro $\varrho \to 0+$. Proto je funkce

$$\varrho \mapsto (\beta_\varrho * u)(x)$$

nerostoucí a

$$\lim_{\varrho \to 0+} (\beta_\varrho * u)(x) = \omega \int_0^1 \alpha^{m-1}\psi(\alpha) u(x)\, d\alpha = u(x).$$

Víme, že $\beta_r * u \in \mathcal{C}^\infty(U_r)$ a zbývá tedy ověřit, že $\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r)$.
Nechť $x \in U_r$, $\varrho > 0$, $\overline{B_\varrho(x)} \subset U_r$. Potom

$$\int (\beta_r * u)\, d\lambda_{x,\varrho} = \int \Big(\int_{B_r(0)} u(z-y)\beta_r(y)\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) =$$

$$\int_{B_r(0)} \Big(\int u(z-y)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) \Big) \beta_r(y)\, d\lambda(y).$$

Pro každé $y \in B_r(0)$ je funkce $z \mapsto u(z-y)$ superharmonická na okolí koule $\overline{B_\varrho(x)}$, takže podle (2.2.5) je

$$\int u(z-y)\, d\lambda_{x,\varrho}(z) \le u(x-y),$$

tudíž

$$\int (\beta_r * u)\, d\lambda_{x,\varrho} \le \int_{B_r(0)} u(x-y)\beta_r(y)\, d\lambda(y) = (\beta_r * u)(x).$$

Podle (2.2.5) je $\beta_r * u \in \mathcal{S}(U_r)$, neboť $\beta_r * u \le u$. □

2.5.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a V je omezená otevřená množina, $\overline{V} \subset U$ a $u \in \mathcal{S}(U)$. Pak existuje zdola omezená posloupnost (u_n) superharmonických funkcí na V taková, že $u_n \in \mathcal{C}^\infty(V)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $u_n \nearrow u$ na V pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Stačí volit $r > 0$ tak, aby $\overline{V} \subset U_r$ a položit $u_n = \beta_{r/n} * u$ na V. □

2.6 Rieszova věta o rozkladu superharmonické funkce

Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ označme $\mathcal{C}_C(U)$ množinu všech $f \in \mathcal{C}(U)$, pro něž je nosič $\operatorname{spt} f$ kompaktní podmnožina U. Pro $f \in \mathcal{C}_C(U)$ definujme

$$||f|| = \sup |f|(U).$$

Dále označíme $\mathcal{D}(U)$ množinu všech nekonečně diferencovatelných reálných funkcí na U s kompaktním nosičem obsaženým v U.

Nechť $f \in L^1_{loc}(U)$. V teorii distribucí se f ztotožňuje s lineárním funkcionálem

$$\varphi \mapsto \int f\varphi \, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

(Takový funkcionál skutečně určuje f λ–s.v.; viz např. úvodní text v (2.5).)

Podobně se Radonova míra μ na U přirozeným způsobem ztotožňuje s lineárním funkcionálem

$$\varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

(Takový funkcionál určuje míru μ jednoznačně; viz např. (2.6.2) níže a Rieszova věta o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem v U.)

Následující lemma je motivací pro definici distributivního laplasiánu.

2.6.1. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ a nechť v má kompaktní nosič v U. Potom platí*

$$\int_U u\Delta v \, d\lambda = \int_U v\Delta u \, d\lambda.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ taková, že $\varphi = 1$ na okolí nosiče funkce v. (Takovou φ lze definovat např. takto: zvolme V otevřenou omezenou obsahující nosič v a $\overline{V} \subset U$. Pak za φ lze vzít konvoluci β_r a charakteristické funkce množiny V pro dostatečně malé r.)

Definujme

$$u_0 = \begin{cases} u\varphi & \text{na } U, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus U, \end{cases} \qquad\qquad v_0 = \begin{cases} v & \text{na } U, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^m \setminus U. \end{cases}$$

Potom $u_0, v_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ a

$$\int_U u\Delta v \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda, \qquad \int_U v\Delta u \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda.$$

Zvolme $R > 0$ tak, aby nosiče funkcí v a φ byly obsaženy v $B_R(0)$. Potom se u_0, v_0 anulují na okolí množiny $S_R(0)$ a podle Greenovy identity (viz (1.9)) je

$$\int_{\mathbb{R}^m} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda = \int_{B_R(0)} u_0 \Delta v_0 \, d\lambda = \int_{B_R(0)} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} v_0 \Delta u_0 \, d\lambda.$$

$\square$

Podle (2.6.1) pro funkci $u \in \mathcal{C}^2(U)$ jsou na $\mathcal{D}(U)$ funkcionály

$$\varphi \mapsto \int \varphi \Delta u \, d\lambda \qquad \text{a} \qquad \varphi \mapsto \int u \Delta \varphi \, d\lambda$$

totožné. Ovšem funkcionál

$$\varphi \mapsto \int u \Delta \varphi \, d\lambda$$

je definován dokonce pro každou funkci $u \in L^1_{loc}(U)$.

Distributivním laplasiánem funkce $u \in L^1_{loc}(U)$ na U rozumíme lineární funkcionál

$$\mathbb{\Delta} u : \varphi \mapsto \int_U u \Delta \varphi \, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

2.6.2. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $f \in L^1_{loc}(U)$ a $\mathbb{\Delta} f = 0$ na U. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $f = h$ λ–s.v. na U.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $U = B_R(0)$ a $f \in L^1(B_R(0))$. Položme $f = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus B_R(0)$, zvolme $r \in]0, R[$, $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ takovou, že $\operatorname{spt} \gamma \subset B_r(0)$ a definujme

$$g = \gamma * f : x \mapsto \int \gamma(x-y) f(y) \, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$. Nechť $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ a $\operatorname{spt} \eta \subset B_{R-r}(0)$. Podle (2.6.1) je

$$\int \Delta g \eta \, d\lambda = \int g \Delta \eta \, d\lambda = \int \Big(\int \gamma(x-y) f(y) \, d\lambda(y) \Big) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) =$$

$$= \int \Big(\int \gamma(z) f(x-z) \, d\lambda(z) \Big) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) = \int \gamma(z) \Big(\int f(x-z) \Delta \eta(x) \, d\lambda(x) \Big) \, d\lambda(z) =$$

$$= \int_{B_r(0)} \gamma(z) \Big(\int f(y) \Delta \eta(z+y) \, d\lambda(y) \Big) \, d\lambda(z).$$

Pro každé $z \in B_r(0)$ má funkce $y \mapsto \eta(z+y)$ nosič v $B_R(0)$, takže z předpokladu $\mathbb{\Delta} f = 0$ plyne, že vnitřní integrál je roven 0. Dokázali jsme, že

$$\int \Delta g \eta \, d\lambda = 0,$$

kdykoli $\eta \in \mathcal{D}(B_{R-r}(0))$, tudíž $\Delta g = 0$ v $B_{R-r}(0)$.

Nechť $\varrho \in]0, R-r[$. Z (2.5.1) pro $u = g$, $u = -g$ vyplývá, že $\beta_\varrho * g = g$ na $B_{R-r-\varrho}(0)$. Není těžké ověřit, že platí

$$\gamma * (\beta_\varrho * f) = \beta_\varrho * (\gamma * f),$$

takže $\gamma * (f - \beta_\varrho * f) = 0$ na $B_{R-r-\varrho}(0)$, kdykoli $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(B_r(0))$.

Nechť $x \in B_R(0)$ je Lebesgueův bod funkce f. Volme $r \in]0, R[$ tak, aby $|x| < R - r$. Dále volme $\varrho > 0$ tak, aby $|x| < R - r - \varrho$. Funkce $\beta_\varrho * f$ je zřejmě v bodě x spojitá, takže x je Lebesgueovým bodem funkce $f - \beta_\varrho * f$. Protože pro každé $s \in]0, r[$ platí

$$(\beta_s * (f - \beta_\varrho * f))(x) = 0,$$

je $(f - \beta_\varrho * f)(x) = 0$ (viz začátek (2.5)). Odtud plyne, že existuje funkce $h \in \mathcal{C}^\infty(B_R(0))$ taková, že $h = f$ λ–s.v. Podle předpokladu a (2.6.1) je

$$0 = \int h \Delta \varphi \, d\lambda = \int \varphi \Delta h \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(B_R(0))$, takže $\Delta h = 0$ na $B_R(0)$. $\square$

2.6.3. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, mající v případě $m = 2$ kompaktní nosič a pro niž je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ v případě $m > 2$. Potom*

$$\mathbb{\Delta}(-N\mu) = \mu.$$

Množina $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$ je maximální otevřená množina, na níž je funkce $N\mu$ harmonická.

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Užitím Fubiniovy věty a (1.9.2) dostaneme

$$\int (-N\mu)\Delta\varphi \, d\lambda = \int \Big(- \int N(x,y)\, d\mu(y) \Big) \Delta\varphi(x)\, d\lambda(x) =$$
$$= \int \Big(\int -N(x,y)\Delta\varphi(x)\, d\lambda(x) \Big)\, d\mu(y) =$$
$$= \int \Big(\int -N_0(z)\Delta\varphi(z+y)\, d\lambda(z) \Big)\, d\mu(y) = \int \varphi(y)\, d\mu(y).$$

Protože funkce $N\mu$ je spojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, plyne podle (2.6.2) z $\mathbb{\Delta}(-N\mu) = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$, že $N\mu$ je harmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$. Je-li $N\mu$ harmonická na otevřené množině $V \subset \mathbb{R}^m$, $\Delta(-N\mu) = 0$ na V, tudíž $\mathbb{\Delta}(-N\mu) = 0$ na V, tudíž $\mu|_V = 0$. Proto je $\mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\mu)$ maximální otevřená množina, na níž je funkce $N\mu$ harmonická. $\square$

2.6.4. Lemma. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $f \in \mathcal{C}_C(U)$ a nechť $V \subset U$ je otevřená množina, $\operatorname{spt} f \subset V$. Potom existují $\varphi_n \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi_n \subset V$ a $||f - \varphi_n|| \to 0$ pro $n \to \infty$. Jestliže $f \geq 0$, pak existují $\varphi_n \geq 0$ s uvedenými vlastnostmi.*

Důkaz. Položme $f = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus U$ a zvolme $r > 0$ tak, aby $\overline{B_r(a)} \subset V$ pro každé $a \in \operatorname{spt} f$. Potom $\beta_r * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{spt}(\beta_r * f) \subset V$ a

$$||f - \beta_r * f|| = \sup \Big\{ \Big| \int_{B_r(0)} \Big(f(x-y) - f(x) \Big) \beta_r(y)\, d\lambda(y) \Big| ; x \in \mathbb{R}^m \Big\} \leq$$
$$\leq \sup \{ |f(x-y) - f(x)|; x \in \mathbb{R}^m, y \in B_r(0) \}.$$

Protože f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^m$, je

$$\sup \{ |f(x-y) - f(x)|; x \in \mathbb{R}^m, y \in B_\varrho(0) \} \to 0$$

pro $\varrho \to 0+$. Definujme $\varphi_n = \beta_{r/n} * f$ na U. Potom $\varphi_n \geq 0$, pokud $f \geq 0$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi_n \subset V$ a $||f - \varphi_n|| \to 0$ pro $n \to \infty$. $\square$

2.6.5. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $u \in \mathcal{S}(U)$. Potom existuje právě jedna Radonova míra μ na U tak, že*

$$\mathbb{\Delta}(-u) = \mu.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\varphi \geq 0$ a V je omezená otevřená množina taková, že

$$\operatorname{spt}\varphi \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Podle (2.5.2) existuje zdola omezená posloupnost (u_n) superharmonických funkcí třídy $\mathcal{C}^\infty$ na V taková, že $u_n \nearrow u$ na V pro $n \to \infty$. Z (2.6.1) a (2.2.6 (e)) dostáváme

$$\int_V u_n \Delta\varphi\, d\lambda = \int \varphi \Delta u_n\, d\lambda \leq 0.$$

Z Lebesgueovy věty plyne

$$\int_U u\Delta\varphi\, d\lambda \le 0.$$

Definujme nyní

$$A(\varphi) = -\int_U u\Delta\varphi\, d\lambda, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Nechť W je omezená otevřená množina, $\overline{W} \subset U$. Tvrdíme, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $|A(\varphi)| \le c||\varphi||$, kdykoli $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi \subset W$. Zvolíme funkci $\gamma \in \mathcal{D}(U)$, $0 \le \gamma \le 1$, $\gamma = 1$ na W. Pak na U platí

$$-||\varphi||\gamma \le \varphi \le ||\varphi||\gamma$$

pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\operatorname{spt}\varphi \subset W$. Protože funkcionál A je nezáporný, platí

$$-||\varphi||A(\gamma) \le A(\varphi) \le ||\varphi||A(\gamma)$$

a stačí tedy položit $c = A(\gamma)$.

Lze tedy na základě (2.6.4) rozšířit A z $\mathcal{D}(U)$ na nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_C(U)$, který opět označíme A. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje Radonova míra μ na U taková, že

$$A(\varphi) = \int \varphi\, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{C}_C(U).$$

Odtud

$$\int_U (-u)\Delta\varphi\, d\lambda = \int \varphi\, d\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U),$$

neboli $\mathbb{\Delta}(-u) = \mu$. Víme již, že míra μ je určena jednoznačně. □

2.6.6. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $u \in \mathcal{S}(U)$, μ je Radonova míra na U a $\mathbb{\Delta}(-u) = \mu$. Potom ke každé omezené otevřené množině V, pro niž $\overline{V} \subset U$, existuje harmonická funkce h^V na V taková, že na V platí*

$$u = N(\mu|_V) + h^V.$$

Důkaz. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Potom

$$\int u\Delta\varphi\, d\lambda = -\int \varphi\, d\mu = -\int \varphi\, d(\mu|_V).$$

Podle (2.6.3) je

$$\int N(\mu|_V)\Delta\varphi\, d\lambda = -\int \varphi\, d(\mu|_V).$$

Pro funkci $v = u - N(\mu|_V) \in L^1(V)$ platí tudíž

$$\int v\Delta\varphi\, d\lambda = 0,$$

kdykoli $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, neboli $\mathbb{\Delta}v = 0$ na V. Nyní tvrzení plyne z (2.6.2) a (2.2.11) □

2.6.7. Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ a $u \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Jestliže*

$$\liminf_{x\to a,\, x\neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)} > -\infty,$$

potom existuje $c \in \mathbb{R}$ a funkce $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $u = cN_a + h$ na $U \setminus \{a\}$. Jestliže

$$\liminf_{x \to a,\, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)} \geq 0$$

(speciálně, když $u \geq 0$ na $U \setminus \{a\}$), pak $c \geq 0$.

Důkaz. Zvolme $d < 0$, pro něž

$$d < \liminf_{x \to a,\, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)}$$

a definujme

$$v = \begin{cases} -dN_a + u & \text{na } U \setminus \{a\}, \\ \infty & \text{na } \{a\}. \end{cases}$$

Protože

$$\liminf_{x \to a,\, x \neq a} v(x) = \liminf_{x \to a,\, x \neq a} N_a(x) \Big(\frac{u(x)}{N_a(x)} - d \Big) = \infty,$$

je v zdola polospojitá na U a pomocí (2.2.5) se snadno ověří, že $v \in \mathcal{S}(U)$. Podle (2.6.5) existuje Radonova míra μ na U tak, že $\Delta(-v) = \mu$ a přitom $\mu = 0$ na $U \setminus \{a\}$, neboť v je na $U \setminus \{a\}$ harmonická. Existuje tudíž $k \geq 0$ tak, že $\mu = k\varepsilon_a$ (ε_a značí Diracovu míru soustředěnou v bodě a). Pro funkci $v - kN_a \in L^1_{loc}(U)$ je $\Delta(v - kN_a) = 0$ na U a z (2.6.2) a z definice funkce v plyne, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $v = kN_a + h$ všude na U. Pro $c = d + k$ platí $u = cN_a + h$ na $U \setminus \{a\}$. Z podmínky

$$\liminf_{x \to a, x \neq a} \frac{u(x)}{N_a(x)} \geq 0$$

plyne ovšem $c \geq 0$. □

2.6.8. Korolár. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ a $u \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ je omezená. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $u = h$ na $U \setminus \{a\}$.*

2.7 Superharmonické funkce na $\mathbb{R}^m$

2.7.1. Věta. *Nechť $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ je zdola omezená. Potom je u konstantní.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $u \geq 0$. Podle (2.1.1) existuje $z \in \overline{B_1(0)}$, pro něž $u(z) = \inf u(\overline{B_1(0)})$. Pro $R > 1$ definujme

$$h_R : x \mapsto u(z) \frac{\log R - \log |x|}{\log R}, \qquad x \in \overline{B_R(0)} \setminus B_1(0).$$

Protože $h_R \leq u$ na $S_R(0) \cup S_1(0)$ a h_R je harmonická na $B_R(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, je podle (2.1.10) $u \geq h_R$ na $B_R(0) \setminus \overline{B_1(0)}$. Pro $R \to \infty$ dostáváme $u \geq u(z)$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$. Funkce u nabývá tedy na $\mathbb{R}^2$ svého minima, podle (2.2.3) je tedy konstantní. □

2.7.2. Tvrzení. *Nechť $m > 2$ a nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ taková, že $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom*

$$\lim_{R \to \infty} \int N\mu \, d\sigma_{0,R} = 0.$$

Důkaz. Podle (2.3.5) je $N\sigma_{0,R} \searrow 0$ pro $R \to \infty$. Podle (2.3.5) a (2.3.6) platí

$$\int N\sigma_{0,1}\,d\mu = \frac{1}{\omega(m-2)}\Big(\mu(B_1(0)) + \int_{\mathbb{R}^m\setminus B_1(0)} |x|^{2-m}\,d\mu(x)\Big) < \infty$$

a

$$\int N\mu\,d\sigma_{0,R} = \int N\sigma_{0,R}\,d\mu.$$

Nyní plyne tvrzení z Lebesgueovy věty. $\square$

2.7.3. Lemma. *Nechť $m > 2$ a $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{0,R} =: c$$

a platí $u \geq c$.

Důkaz. Existence limity plyne z (2.2.9). Zvolme $x \in \mathbb{R}^m$ a $\alpha \in \,]0,1[$. Je-li $R > |x|/\alpha$, platí na $B_R(0)$ podle (2.2.5) $u \geq H_{0,R}(u|_{S_R(0)})$. Protože pro $y \in S_R(0)$ je

$$R^{m-2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^m} \geq \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}}$$

a $u \geq 0$, dostáváme

$$u(x) \geq H_{0,R}(u|_{S_R(0)})(x) \geq \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}} \int u\,d\sigma_{0,R}.$$

Odtud pro $R \to \infty$ plyne

$$u(x) \geq c\,\frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{m-1}}$$

a konečně pro $\alpha \to 0+$ dostaneme $u(x) \geq c$. $\square$

2.7.4. Věta. *Nechť $m > 2$ a $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}^m$ platí*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{a,R} = \inf u(\mathbb{R}^m), \qquad \lim_{R\to\infty} \int u\,d\lambda_{a,R} = \inf u(\mathbb{R}^m).$$

Důkaz. Označme $c = \inf u(\mathbb{R}^m)$. Nechť nejprve $a = 0$. Zřejmě

$$\lim_{R\to\infty} \int u\,d\sigma_{0,R} \geq c$$

a z (2.7.3) plyne, že neplatí ostrá nerovnost. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\varrho > 0$ takové, že

$$\int u\,d\sigma_{0,R} \leq c + \varepsilon,$$

kdykoli $R > \varrho$. Pro $R > \varrho$ dostáváme podle (2.1.8)

$$\begin{aligned}
\int u\,d\lambda_{0,R} &= m\int_0^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha = \\
&= m\int_0^{\varrho/R} \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha + m\int_{\varrho/R}^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,\alpha R}\Big)\alpha^{m-1}\,d\alpha \leq \\
&\leq m\int_0^1 \Big(\int u\,d\sigma_{0,t\varrho}\Big)\Big(\frac{\varrho t}{R}\Big)^{m-1}\frac{\varrho}{R}\,dt + (c+\varepsilon)\Big(1-\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m\Big) = \\
&= \Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m \int u\,d\lambda_{0,\varrho} + (c+\varepsilon)\Big(1-\Big(\frac{\varrho}{R}\Big)^m\Big).
\end{aligned}$$

Odtud plyne z (2.2.9) nerovnost

$$\lim_{R\to\infty}\int u\,d\lambda_{0,R}\le c.$$

Z (2.1.8) a (2.2.9) plyne nerovnost

$$\int u\,d\lambda_{0,R}\ge m\Big(\int u\,d\sigma_{0,R}\Big)\int_0^1\alpha^{m-1}\,d\alpha=\int u\,d\sigma_{0,R},$$

tudíž

$$\lim_{R\to\infty}\int u\,d\lambda_{0,R}\ge c.$$

Pro $a\in\mathbb{R}^m$ uvažujme místo u funkci $x\mapsto u(x-a)$, $x\in\mathbb{R}^m$. $\square$

2.7.5. Lemma. *Nechť $m>2$, $u\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, $\inf u(\mathbb{R}^m)=0$, $a\in\mathbb{R}^m$ a $\mu=\Delta(-u)$. Potom*

$$\lim_{R\to\infty}R^{2-m}\mu(\overline{B_R(a)})=0.$$

Důkaz. Zvolme funkci $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, pro niž $\eta\ge 0$, $\eta(B_1(0))=\{1\}$, $\operatorname{spt}\eta\subset B_2(0)$ a položme $c=\sup|\Delta\eta|(\mathbb{R}^m)$. Pro $R>0$ definujme

$$\varphi_R(x)=\eta(a+\frac{x}{R}),\qquad x\in\mathbb{R}^m.$$

Potom

$$\begin{aligned}\mu(\overline{B_R(a)})&\le\int\varphi_R\,d\mu=-\int u\Delta\varphi_R\,d\lambda\le\int_{B_{2R}(a)}u|\Delta\varphi_R|\,d\lambda\le\\&\le cR^{-2}\int_{B_{2R}(a)}u\,d\lambda=cR^{-2}(2R)^m\lambda(B_1(0))\cdot\int u\,d\lambda_{a,2R}.\end{aligned}$$

Podle (2.2.9) a (2.7.4) je tudíž

$$R^{2-m}\mu(\overline{B_R(a)})\le c\,2^m\lambda(B_1(0))\int u\,d\lambda_{a,R}\to 0$$

pro $R\to\infty$. $\square$

2.7.6. Lemma. *Nechť $m>2$, $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $a\in\mathbb{R}^m$. Potom je funkce*

$$\varrho\mapsto\int u\,d\sigma_{a,\varrho}$$

spojitá na $]0,\infty[$.

Důkaz. Zvolme $R>0$. Podle (2.6.6) existuje funkce $h\in\mathcal{H}(B_R(a))$ a Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ tak, že pro $\nu=\mu|_{B_R(a)}$ a $v=N\nu$ platí $u=v+h$ na $B_R(a)$. Protože

$$\int h\,d\sigma_{a,\varrho}=h(a)$$

pro všechna $\varrho\in\,]0,R[$, stačí ověřit spojitost funkce

$$\varrho\mapsto\int v\,d\sigma_{a,\varrho}$$

na $]0,R[$. Tato funkce je zdola polospojitá (viz (1.5.1) a (2.1.5)) a tudíž zprava spojitá na $]0,R[$, neboť je podle (2.2.9) nerostoucí. Nechť $0<r<R$. Pak z (2.3.5) plyne

$$N\sigma_{a,\varrho} \nearrow N\sigma_{a,r} \quad \text{pro} \quad \varrho \to r-,$$

tudíž

$$\int N\sigma_{a,\varrho}\, d\nu \nearrow \int N\sigma_{a,r}\, d\nu.$$

Ovšem

$$\int N\sigma_{a,\varrho}\, d\nu = \int N\nu\, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \in\,]0,R[,$$

tedy

$$\int v\, d\sigma_{a,\varrho} \to \int v\, d\sigma_{a,r} \quad \text{pro} \quad \varrho \to r-.$$

□

2.7.7. Lemma. *Nechť $m>2$, $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$,*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{a,R} = 0 \qquad \text{a} \qquad \mu = \Delta(-u).$$

Potom $u(a) = N\mu(a)$.

Důkaz. Pro každé $R>0$ existuje podle (2.6.6) funkce $h_R \in \mathcal{H}(B_R(a))$ tak, že

$$u = N(\mu|_{B_R(a)}) + h_R.$$

Nechť $R>0$ a $r \in\,]0,R[$. Potom

$$\int u\, d\sigma_{a,r} = \int N(\mu|_{B_R(a)})\, d\sigma_{a,r} + \int h_R\, d\sigma_{a,r} = \int_{B_R(a)} N\sigma_{a,r}\, d\mu + h_R(a),$$

neboť $h_R \in \mathcal{H}(B_R(a))$. Podle (2.3.5) je

$$N\sigma_{a,r}(x) = \begin{cases} p(r), & x \in \overline{B_r(a)}, \\ p(|x-a|), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B_r(a)}; \end{cases}$$

připomeňme, že $p(t) = \frac{1}{\omega(m-2)} t^{2-m}$, $t>0$. Platí tedy

$$\int u\, d\sigma_{a,r} - h_R(a) = p(r)\mu(\overline{B_r(a)}) + \int_{B_R(a)\setminus \overline{B_r(a)}} p(|x-a|)\, d\mu(x).$$

Protože je funkce

$$\varrho \mapsto \int u\, d\sigma_{a,\varrho}, \qquad \varrho \in\,]0,\infty[$$

spojitá, platí

$$\int u\, d\sigma_{a,R} - h_R(a) = p(R)\mu(B_R(a)).$$

Podle předpokladu je

$$\int u\, d\sigma_{a,R} \to 0 \quad \text{pro} \quad R \to \infty,$$

podle (2.7.5) je $p(R)\mu(B_R(a)) \to 0$ pro $R\to\infty$, tudíž $h_R(a) \to 0$ pro $R \to \infty$. Z rovnosti $u(a) = N(\mu|_{B_R(a)}) + h_R(a)$ nyní vyplývá $u(a) = N\mu(a)$. □

2.7.8. Věta. *Nechť $m > 2$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} = 0$;

(ii) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a pro každé* $a \in \mathbb{R}^m$ *platí* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{a,R} = 0$;

(iii) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{0,R} = 0$;

(iv) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a pro každé* $a \in \mathbb{R}^m$ *platí* $\lim_{R\to\infty} \int u\, d\lambda_{a,R} = 0$;

(v) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ *a* $\inf u(\mathbb{R}^m) = 0$;

(vi) *existuje Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ taková, že*

$$\int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty \qquad \text{a} \qquad u = N\mu.$$

Důkaz. Podle (2.7.4) jsou podmínky (i) – (v) ekvivalentní. Platí-li (vi), je podle (2.3.6) $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ a podle (2.7.2) platí

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} = 0,$$

takže (vi)$\Rightarrow$(i).

Nechť platí (i) a nechť $\mu = \mathbb{\Delta}(-u)$. Protože platí (ii), je podle (2.7.7) $u(a) = N\mu(a)$ pro každé $a \in \mathbb{R}^m$. Speciálně je $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a tudíž

$$\int_1^\infty \mu(B_r(0)) r^{1-m}\, dr < \infty$$

podle (2.3.6). Platí tedy (vi). $\square$

2.7.9. Korolár. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje právě jedno $c \geq 0$ a právě jedna Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ tak, že $u = N\mu + c$. Platí*

$$c = \lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} \qquad \text{a} \qquad \mu = \mathbb{\Delta}(-u).$$

Důkaz. Plyne ihned z (2.7.8), (2.7.4) a (2.7.2). $\square$

2.7.10. Tvrzení. *Nechť $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom existuje $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, pro niž $h \leq u$, právě když*

$$\lim_{R\to\infty} \int u\, d\sigma_{0,R} > -\infty.$$

Důkaz. Pro $r > 0$ položme $h_r = H_{0,r}(u|_{S_r(0)})$. Podle (2.3.3) je $h_r \in \mathcal{H}(B_r(0))$, podle (2.2.5) platí $h_r \leq u|_{B_r(0)}$ a

$$h_r(0) = \int u\, d\sigma_{0,r}.$$

Z (2.4.1) snadno plyne, že $h_\varrho \leq h_r$ na $B_r(0)$, kdykoli $0 < r < \varrho$. Pro $x \in \mathbb{R}^m$ definujme

$$h(x) = \inf\{h_r(x); r > |x|\}.$$

Potom $h \leq u$.

Je-li $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $h \leq u$, je

$$\int u\, d\sigma_{0,R} \geq \int h\, d\sigma_{0,R} = h(0)$$

pro každé $R > 0$. $\square$

2.7.11. Korolár. *Nechť $m > 2$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a nechť existuje $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $h \le u$. Potom existuje právě jedna Radonova míra μ a právě jedno $c \ge 0$ tak, že $u = N\mu + h + c$. Přitom $h + c$ je největší harmonická minoranta funkce u.*

Důkaz. Protože $u - h \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$, existuje podle (2.7.9) právě jedna Radonova míra μ v $\mathbb{R}^m$ a právě jedno $c \ge 0$ tak, že $u - h = N\mu + c$. Je-li $k \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, $k \le u$, existuje (opět podle (2.7.9)) Radonova míra ν v $\mathbb{R}^m$ a $d \ge 0$ tak, že $u - k = N\nu + d$. Potom $N\mu, N\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $k + N\nu + d = h + N\mu + c$. Protože $\Delta f = 0$ pro každou $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, je $\Delta(N\nu) = \Delta(N\mu)$, tedy podle (2.6.3) je $\nu = \mu$, tudíž $k + d = h + c$. Jelikož $d \ge 0$, je $k \le k + d = h + c$. $\square$

2.8 Princip spojitosti

2.8.1. Lemma. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ taková, že $N\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ (v případě $m = 2$ navíc předpokládáme, že $\operatorname{spt}(\mu)$ je kompaktní). Nechť $F \subset \mathbb{R}^m$ a $z \in \overline{F}$. Pro každé $r > 0$ označme $\mu_r = \mu_{\overline{B_r(z)}}$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $N\mu(z) < \infty$ *a* $\lim_{x \to z, x \in F} N\mu(x) = N\mu(z)$;

(ii) $\lim_{r \to 0+}(\limsup_{x \to z, x \in F} |N\mu_r(x)|) = 0$.

Důkaz. Všimněme si, že $N\mu(z) < \infty$, právě když existuje $r > 0$, pro něž $N\mu_r(z) < \infty$. Nechť $N\mu(z) < \infty$. Potom $\lim_{r \to 0+} N\mu_r(z) = 0$ a $\lim_{x \to z} N(\mu - \mu_r)(x) = N(\mu - \mu_r)(z)$. Důkaz nyní snadno plyne z rovnosti

$$N\mu(x) - N\mu(z) = N\mu_r(x) - N(\mu - \mu_r)(x) - N(\mu - \mu_r)(z) - N\mu_r(z)\,.$$

$\square$

2.8.2. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$, jejíž nosič K je v případě $m = 2$ kompaktní, a nechť $z \in K$. Jestliže*

$$\lim_{x \to z, x \in K} N\mu(x) = N\mu(z),$$

potom

$$\lim_{x \to z} N\mu(x) = N\mu(z).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $N\mu(z) < \infty$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ zvolme $\pi(x) \in K$ tak, aby $|x - \pi(x)| \le |x - y|$, kdykoli $y \in K$. Potom pro $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \le |y - x| + |x - \pi(x)| \le 2|y - x|$, tudíž

$$\begin{aligned} N(\pi(x), y) &\ge N(x, y) - (1/2\pi)\log 2 && \text{v případě } m = 2, \\ N(\pi(x), y) &\ge 2^{2-m} N(x, y) && \text{v případě } m > 2. \end{aligned}$$

Zřejmě $|\pi(x) - z| \le |\pi(x) - x| + |x - z| \le 2|x - z|$. Odtud dostáváme, s využitím dokázaných nerovností, pro $r, \varrho > 0$

$$\begin{aligned} \sup N\mu_r(B_\varrho(z)) &\le \sup N\mu_r(K \cap B_{2\varrho}(z)) + (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(K \cap \overline{B\varrho(z)}) && \text{pokud } m = 2, \\ \sup N\mu_r(B_\varrho(z)) &\le 2^{m-2} \sup N\mu_r(K \cap B_{2\varrho}(z)) && \text{pokud } m > 2. \end{aligned}$$

(Stejně jako v důkazu (2.8.1) je $\mu_r = \mu|_{\overline{B_r(z)}}$.) Tvrzení věty plyne nyní okamžitě z (2.8.1). $\square$

2.8.3. Věta. *Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$ (v případě $m = 2$ s kompaktním nosičem) a nechť $N\mu < \infty$ μ-skoro všude. Potom existují Radonovy míry μ_n, $n \in \mathbb{N}$, jejichž nosiče jsou po dvou disjunktní kompaktní podmnožiny nosiče míry μ, potenciály $N\mu_n$ jsou spojité v $\mathbb{R}^m$ a $N\mu = \sum_{n=1}^{\infty} N\mu_n$.*

Důkaz. Pišme $u = N\mu$ a $K = \operatorname{spt}(\mu)$. Protože $u|_K$ je μ-skoro všude konečná zdola polospojitá funkce na K, podle Luzinovy věty existují po dvou disjunktní kompaktní množiny $K_n \subset K$ takové, že $\mu(K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$ a $u|_{K_n}$ je spojitá funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $\mu_n = \mu|_{K_n}$, $u_n = N\mu_n$. Zřejmě $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Zvolme $j \in \mathbb{N}$. Funkce $(u_j)|_{K_j}$ a $(\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} u_n)|_{K_j}$ jsou zdola polospojité a jejich součet, tedy funkce $u|_{K_j}$, je v každém bodě z K_j spojitá. Proto je funkce $(u_j)|_{K_j}$ spojitá v každém bodě z K_j. Podle (2.8.2) je funkce u_j spojitá v $\mathbb{R}^m$. $\square$

Kapitola 3

Klasická a zobecněná Dirichletova úloha

3.1 Příklady iregulárních množin

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Připomeňme (viz (1.3.4)), že klasická Dirichletova úloha pro okrajovou podmínku f spočívá v nalezení harmonické funkce h na U, pro niž platí rovnost

$$(*) \qquad \lim_{x\to z} h(x) = f(z), \qquad z \in \partial U.$$

(Podle (1.2.1) takové harmonické rozšíření funkce f existuje nejvýše jedno.) Říkáme, že množina U je *regulární*, pokud klasická Dirichletova úloha má řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Omezená otevřená množina, která není regulární, se nazývá *iregulární*. Podle (1.3.3) je každá koule regulární množina.

3.1.1. Příklad. Nechť $U = B_1(0) \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom je U iregulární oblast. Položme $f = 0$ na $S_1(0)$, $f(0) = c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Potom je $|h| \le |c|$ podle (1.2.1) a podle (2.2.7) (aplikuje se na $u = h$, $u = -h$ a $M = \{0\}$) je $h = 0$. Pro $c \neq 0$ tedy $(*)$ neplatí pro $z = 0$.

3.1.2. Příklad. Nechť $z_n \in B_1(0) \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť $z_n \to 0$. Sestrojme takovou funkci $v \in \mathcal{S}^+(B_2(0))$, která je harmonická na $B_2(0) \setminus (\{0\} \cup \{z_n; n \in \mathbb{N}\})$ a pro niž $v = \infty$ na $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ a $v(0) < \infty$; srv. (2.2.6 (f)). Zvolme $c > v(0)$ a definujme

$$U = (B_1(0) \setminus \{0\}) \cap \{x \in B_2(0); v < c\}.$$

Potom je U omezená otevřená množina a 0 je hraniční bod U, který není izolovaným bodem ∂U. Položme $f = v$ na $\partial U \setminus \{0\}$, $f(0) = c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Opět podle (2.2.7) platí $h = v$ na U. Protože $v \ge c$ na $B_1(0) \setminus U$, je podle (2.2.10)

$$c > v(0) = \liminf_{x\to 0,\, x\neq 0} v(x) = \liminf_{x\to 0,\, x\in U} v(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = c.$$

Tento spor ukazuje, že U je iregulární množina.

3.1.3. Příklad. Označme

$$I = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 \le x_1 \le 1, x_2 = x_3 = 0\}.$$

Pro borelovskou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ označme $M^* = \{s \in [0,1]; (s,0,0) \in M\}$ a definujme

$$\mu(M) = \omega \cdot \int_{M^*} t\,dt$$

(takže μ má lineární hustotu vzhledem k lineární míře na I). Položme $u = N\mu$. Potom $u(0) = 1$ a $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3 \setminus I)$. Pro $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus I$ položme

$$v(x) = \sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} +$$
$$+ x_1 \log \left| 1 - x_1 + \sqrt{(1-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} \right| + x_1 \log \left| x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right|,$$

$$w(x) = x_1 \log(x_2^2 + x_3^2).$$

Snadný výpočet ukazuje, že $u = v - w$ na $\mathbb{R}^3 \setminus I$, a dále je $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$ pro každé $z \in I$, $z_1 \notin \{0,1\}$. Pro $b > 0$ označme

$$E(b) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 > 0,\ \exp\left(\frac{-b}{x_1}\right) = x_2^2 + x_3^2 \right\}.$$

Protože $\lim_{x \to 0} v(x) = 1$, je

$$(**) \qquad \lim_{x \to 0,\, x \in E(b)} u(x) = 1 + b.$$

Zvolme $c > 0$ a označme

$$U = B_1(0) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 > 0, u < 1 + c\}.$$

Potom je U otevřená omezená množina a 0 je hraniční bod, který není izolovaný. Na $\partial U \cap B_1(0)$ je $u = 1 + c$. Definujme $f = u$ na $\partial U \setminus \{0\}$ a $f(0) = 1 + c$. Potom je $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Předpokládejme, že existuje $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž platí $(*)$. Pak $h = u$ na U (opět podle (2.2.7)). Zvolme $b \in]0, c[$. Podle $(**)$ existuje $r > 0$ tak, že $E(b) \cap B_r(0) \subset U$ a tedy z $(**)$ plyne, že

$$1 + b = \lim_{x \to 0,\, x \in E(b)} u(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1 + c,$$

což není možné. Množina U je tudíž iregulární. Povšimněme si, že množina U je homeomorfní s $B_1(0)$.

3.2 PWB řešení zobecněné Dirichletovy úlohy

Jak jsme viděli v (3.1), klasická Dirichletova úloha nemusí mít řešení pro každou spojitou okrajovou podmínku. Zobecněnou Dirichletovou úlohou budeme rozumět zobrazení, které každé spojité okrajové podmínce přiřazuje harmonickou funkci a má rozumné vlastnosti vyjádřené v následující definici.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina. Říkáme, že zobrazení $A : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ je *Keldyšův operátor*, jestliže

(i) A je lineární;

(ii) A je nezáporný (tj. $Af \geq 0$, kdykoli $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$);

(iii) jestliže pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ existuje řešení h_f klasické Dirichletovy úlohy, potom $Af = h_f$.

Nyní popíšeme metodu (pojmenovanou po O. Perronovi, N. Wienerovi a M. Brelotovi), která vede k důkazu existence Keldyšova operátoru. Otázkou jednoznačnosti Keldyšova operátoru se budeme zabývat v odstavci (3.7).

V celé této kapitole budeme nadále předpokládat, že $U \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná omezená oblast.

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je libovolná funkce. Říkáme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}^*$ je *horní funkce* k funkci f, jestliže $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a pro každé $z \in \partial U$ platí

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq f(z) \qquad \text{a} \qquad \liminf_{x \to z} u(x) > -\infty.$$

Množinu všech horních funkcí k funkci f označíme $\mathcal{U}(f)$. Řekneme, že funkce $v : U \to \mathbb{R}^*$ je *dolní funkce* k funkci f, jestliže $-v \in \mathcal{U}(-f)$. Množinu všech dolních funkcí k funkci f označíme $\mathcal{L}(f)$. Funkce

$$\overline{H}f = \inf \mathcal{U}(f) \qquad \text{resp.} \qquad \underline{H}f = \sup \mathcal{L}(f)$$

nazýváme *horní* (resp. *dolní*) *řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy. Podrobněji mluvíme o *Perron-Wiener-Brelotově řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy.

3.2.1. Tvrzení. *Je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, je $\underline{H}f \leq \overline{H}f$ a každá z funkcí $\underline{H}f$, $\overline{H}f$ je buďto identicky rovna ∞, nebo identicky rovna $-\infty$, nebo je harmonická.*

Důkaz. Nechť $u \in \mathcal{U}(f)$, $v \in \mathcal{L}(f)$ a $w = u - v$. Potom je $w \in \mathcal{H}^*(U)$ a pro každé $z \in \partial U$, jak se snadno zjistí, platí

$$\liminf_{x \to z} w(x) \geq 0.$$

Podle (2.2.4) je $w \geq 0$, takže $u \geq v$. Odtud ihned plyne nerovnost $\underline{H}f \leq \overline{H}f$. Protože $\mathcal{U}(f)$ a $-\mathcal{L}(f)$ jsou nasycené množiny, plyne zbytek tvrzení z (2.4.3). □

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že funkce f je *resolutivní*, jestliže $\underline{H}f$, $\overline{H}f$ jsou harmonické funkce a $\underline{H}f = \overline{H}f$. Množinu resolutivních funkcí označíme $\mathcal{R}(\partial U)$ a pro $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ definujme $Hf = \overline{H}f$. Pokud bude třeba množinu U vyznačit, budeme psát $H_U f$.

Jestliže pro funkci $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy, je nutně $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ a platí zřejmě $f \in \mathcal{R}(\partial U)$. Označení Hf pro případ $U = B_r(a)$ nekoliduje s označením zavedeným v (1.3). Přirozeně vzniká otázka, zda $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{R}(\partial U)$. Obecněji se můžeme ptát po charakterizaci množiny $\mathcal{R}(\partial U)$.

3.2.2. Lemma. *Nechť $v \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $v|_U \in \mathcal{S}(U)$. Potom je funkce $f = v|_{\partial U}$ resolutivní.*

Důkaz. Z definice horního řešení plyne $\overline{H}f \leq v$ na U. Odtud plyne, že $\overline{H}f$ je dolní funkcí k okrajové podmínce f, takže $\overline{H}f \leq \underline{H}f$. Protože $\underline{H}f \leq \overline{H}f$, platí rovnost a f je zřejmě resolutivní. □

3.2.3. Lemma. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $g : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Potom platí*

(a) *je-li $f \leq g$, pak $\overline{H}f \leq \overline{H}g$;*

(b) *je-li $\lambda > 0$, pak $\overline{H}(\lambda f) = \lambda \overline{H}f$;*

(c) *jestliže součty $f + g$, $\overline{H}f + \overline{H}g$ mají smysl, potom*

$$\overline{H}(f + g) \leq \overline{H}f + \overline{H}g.$$

Důkaz. Tvrzení jsou bezprostředním důsledkem definic. □

3.2.4. Lemma. *Množina reálných resolutivních funkcí tvoří vektorový prostor uzavřený vzhledem ke stejnoměrné konvergenci.*

Důkaz. Nechť f, g jsou reálné resolutivní funkce. Potom podle (3.2.3 (c)) je

$$Hf + Hg = \underline{H}f + \underline{H}g \leq \underline{H}(f+g) \leq \overline{H}(f+g) \leq \overline{H}f + \overline{H}g = Hf + Hg.$$

Odtud plyne, že $f+g$ je resolutivní.

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Je-li $\lambda = 0$, je zřejmě λf resolutivní. Pro $\lambda > 0$ to platí podle (3.2.3 (b)). Je-li $\lambda < 0$, platí

$$\overline{H}(\lambda f) = \overline{H}(-|\lambda| f) = |\lambda| \overline{H}(-f) = -|\lambda| \underline{H} f = \lambda H f,$$

dále

$$\underline{H}(\lambda f) = \underline{H}(-|\lambda| f) = -\overline{H}(|\lambda| f) = -(|\lambda| \overline{H} f) = \lambda H f.$$

Vidíme, že funkce λf je resolutivní.

Nechť $k : \partial U \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a $|k - g| \leq \varepsilon$. Je-li u horní funkce k funkci g, je $u + \varepsilon$ horní funkce k funkci k, platí

$$\overline{H}k \leq \overline{H}g + \varepsilon = Hg + \varepsilon.$$

Podobně se dokáže, že

$$Hg - \varepsilon = \underline{H}g - \varepsilon \leq \underline{H}k.$$

Platí tudíž $\overline{H}k - \underline{H}k \leq 2\varepsilon$, takže k je resolutivní funkce. □

3.2.5. Věta. *Každá spojitá funkce je resolutivní.*

Důkaz. Označme

$$\mathcal{L} = \{(v_1 - v_2)|_{\partial U}; v_j \in \mathcal{C}(\overline{U}), (v_j)|_U \in \mathcal{S}(U), j \in \{1,2\}\}.$$

Potom $\mathcal{L}$ je lineární prostor obsahující konstantní funkce a oddělující body množiny ∂U. Nechť $f \in \mathcal{L}$, $v_j \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $(v_j)|_U \in \mathcal{S}(U)$, $j \in \{1,2\}$ a $f = v_1 - v_2$ na ∂U. Na $\overline{U}$ platí

$$\begin{aligned}|v_1 - v_2| &= \sup(v_1 - v_2, v_2 - v_1) = \sup(v_1 + v_2 - 2v_2, v_1 + v_2 - 2v_1) = \\ &= v_1 + v_2 + \sup(-2v_2, -2v_1) = v_1 + v_2 - \inf(2v_1, 2v_2).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $|f| \in \mathcal{L}$. Podle svazové verze Stone-Weierstrassovy věty je $\mathcal{L}$ stejnoměrně hustý podprostor prostoru $\mathcal{C}(\partial U)$. Z (3.2.2) a (3.2.4) plyne, že každá funkce z $\mathcal{C}(\partial U)$ je resolutivní. □

3.2.6. Korolár. *Zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, je Keldyšův operátor.*

Důkaz. Plyne snadno z (3.2.5) a (3.2.3). □

3.2.7. Věta. *Nechť U_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou oblasti takové, že $U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n+1} \subset U$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$. Nechť $F \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $f = F|_{\partial U}$ a $f_n = F|_{\partial U_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $y \in U$ platí $\lim_{n\to\infty} H_{U_n} f_n(y) = Hf(y)$. Je-li navíc $F|_U \in \mathcal{S}(U)$, potom pro každé $y \in U$ platí $H_{U_n} f_n(y) \searrow Hf(y)$ pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Pro přesnost poznamenejme, že poslední rovnost ovšem znamená toto: je-li $y \in U$, pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $y \in U_k$ a $\lim_{n\to\infty} H_{U_{k+n}} f_{k+n}(y) = Hf(y)$.

Nejprve předpokládejme, že navíc platí $F|_U \in \mathcal{S}(U)$ a nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $F|_{U_n}$ je horní funkce k funkci f_n, tudíž $H_{U_n} f_n \le F$ na U_n. Zvolme horní funkci u k funkci f_n. Potom je funkce

$$v_n = \begin{cases} \min(u, F) & \text{na } U_n, \\ F & \text{na } U \setminus U_n. \end{cases}$$

hyperharmonická a v_n je zřejmě horní funkcí k funkci f, tudíž $H_U f \le v_n$. Protože $v_n \le u$ na U_n, dostáváme $H_U f \le H_{U_n} f_n \le v_n$ na U_n. Podobně se dokáže pro $k \ge n$ nerovnost $H_{U_k} f_k \le H_{U_n} f_n$. Definujme $h = \lim_{n\to\infty} H_{U_n} f_n$. Pak $h \in \mathcal{H}(U)$, $h \ge Hf$, $h \le v_n \le F$ na U_n, tudíž $h \le F$. Vidíme, že h je dolní funkce k funkci f, takže $h \le Hf$. Dokázali jsme rovnost $h = Hf$.

Nechť nyní $F \in \mathcal{C}(\overline{U})$ a $\varepsilon > 0$. Existují funkce $G, K \in \mathcal{C}(\overline{U})$ takové, že $G|_U \in \mathcal{S}(U)$, $K|_U \in \mathcal{S}(U)$ a

$$G - K - \varepsilon \le F \le G - K + \varepsilon.$$

Při zřejmém označení platí $Hg - Hk - \varepsilon \le Hf \le Hg - Hk + \varepsilon$ a

$$H_{U_n} g_n - H_{U_n} k_n - \varepsilon \le H_{U_n} f_n \le H_{U_n} g_n - H_{U_n} k_n + \varepsilon,$$

takže podle první části důkazu je

$$Hf - 2\varepsilon \le Hg - Hk - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} H_{U_n} f_n \le Hg - Hk + \varepsilon \le Hf + 2\varepsilon,$$
$$Hf - 2\varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} H_{U_n} f_n \le Hf + 2\varepsilon.$$

Odtud již tvrzení věty ihned plyne. □

3.3 Harmonická míra a resolutivní funkce

Jestliže μ je Radonova míra na lokálně kompaktním prostoru X, $f : X \to \mathbb{R}^*$, definujeme

$$\int^* f\,d\mu = \inf\Big\{ \int u\,d\mu; u \text{ zdola polospojitá}, u \ge f \text{ na } X \text{ a } u \ge 0 \text{ vně jistého kompaktu} \Big\}.$$

Klademe

$$\int_* f\,d\mu = -\int^* -f\,d\mu.$$

V tomto odstavci bude opět $U \subset \mathbb{R}^m$ neprázdná omezená oblast.

Podle (3.2.6) je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, Keldyšův operátor. Zvolme $x \in U$. Pak je tudíž zobrazení $f \mapsto Hf(x)$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\partial U)$ a tedy podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje právě jedna Radonova míra μ_x na ∂U taková, že

$$Hf(x) = \int f\,d\mu_x, \qquad f \in \mathcal{C}(\partial U).$$

Míru μ_x (podrobněji μ_x^U) nazýváme *harmonická míra* (příslušná oblasti U a bodu x).

3.3.1. Příklad. Nechť $U = B_r(a)$. Připomeňme, že pro $x \in U$ a $y \in \partial U$ je

$$P_x : y \mapsto r^{m-2} \frac{r^2 - |x-a|^2}{|x-y|^m}$$

a pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí podle (1.3.3)

$$Hf(x) = \int f \cdot P_x \, d\sigma_{a,r}.$$

Proto $\mu_x = P_x \cdot \sigma_{a,r}$.

3.3.2. Lemma. *Nechť $\{f_n\}$ je neklesající posloupnost numerických funkcí na ∂U. Jestliže $\overline{H} f_1 > -\infty$, pak*

$$\overline{H}(\sup f_n) = \sup \overline{H} f_n.$$

Důkaz. Zřejmě $\overline{H}(\sup f_n) \geq \sup \overline{H} f_n$. Obrácená nerovnost platí, pokud pro některé $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{H} f_n = \infty$. Lze tedy předpokládat, že $\overline{H} f_n \in \mathcal{H}(U)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Zvolme $x \in U$ a $\varepsilon > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in \mathcal{U}(f_n)$ taková, že

$$u_n(x) \leq \overline{H} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Označme $f = \sup f_n$ a definujme

$$v = \sup \overline{H} f_n + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \overline{H} f_n).$$

Potom $v \in \mathcal{H}^*(U)$ a $v \geq \overline{H} f_n + u_n - \overline{H} f_n = u_n$. Pro $z \in \partial U$ tedy platí

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq \liminf_{x \to z} u_n(x),$$

a poslední číslo je větší nebo rovno $f_n(z)$ a zároveň větší než $-\infty$, neboť $u_n \in \mathcal{U}(f_n)$. Odtud plyne, že $v \in \mathcal{U}(f)$, takže $\overline{H} f \leq v$. Dostáváme

$$\overline{H} f(x) \leq v(x) \leq \sup \overline{H} f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Odtud plyne nerovnost $\overline{H}(\sup f_n) \leq \sup \overline{H} f_n$. □

3.3.3. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $x \in U$. Potom*

$$\overline{H} f(x) = \int^* f \, d\mu_x, \qquad \underline{H} f(x) = \int_* f \, d\mu_x.$$

Důkaz. Nechť nejprve g je zdola polospojitá funkce na ∂U a pro $g_n \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $g_n \nearrow g$. Podle (3.2.5) a (3.3.2) je

$$\overline{H} g(x) = \sup \overline{H} g_n(x) = \sup \int g_n \, d\mu_x = \int g \, d\mu_x = \int^* g d\mu_x.$$

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ a nechť $\mathcal{G}$ je množina všech zdola polospojitých funkcí g na ∂U, pro něž $g \geq f$. Potom

$$\int^* f \, d\mu_x = \inf \Big\{ \int g \, d\mu_x; g \in \mathcal{G} \Big\} = \inf \{ \overline{H} g(x); g \in \mathcal{G} \} \geq \overline{H} f(x).$$

Obrácená nerovnost je zřejmá, pokud $\overline{H} f(x) = \infty$. Nechť $\overline{H} f(x) < \infty$, $c > \overline{H} f(x)$ a $u \in \mathcal{U}(f)$ takové, že $u(x) \leq c$. Pro $z \in \partial U$ definujme

$$g(z) = \liminf_{x \to z} u(x).$$

Potom $g : \partial U \to]-\infty, \infty]$ je zdola polospojitá a $g \geq f$, neboť $u \in \mathcal{U}(f)$. Protože $g \in \mathcal{G}$, platí

$$\int^* f\,d\mu_x \leq \int g\,d\mu_x = \overline{H}g(x) \leq u(x),$$

neboť $u \in \mathcal{U}(g)$. Dostáváme

$$\int^* f\,d\mu_x \leq c,$$

takže

$$\int^* f\,d\mu_x \leq \overline{H}f(x).$$

□

3.3.4. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, $x \in U$. Potom f je resolutivní, právě když $f \in L^1(\mu_x)$. Je-li f resolutivní, platí*

$$Hf(x) = \int f\,d\mu_x.$$

Důkaz. Je-li f resolutivní, je $\underline{H}f(x) = \overline{H}f(x) \in \mathbb{R}$. Podle (3.3.3) je f μ_x–integrovatelná a

$$Hf(x) = \int f\,d\mu_x.$$

Je-li $f \in L^1(\mu_x)$, platí podle (3.3.3) rovnost $\overline{H}f(x) = \underline{H}f(x) \in \mathbb{R}$. Nezáporná harmonická funkce $\overline{H}f - \underline{H}f$ se tedy anuluje v bodě x, a tudíž všude na U podle (1.5.3). □

3.3.5. Věta. *Nechť $x,y \in U$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$c^{-1}\mu_y \leq \mu_x \leq c\mu_y.$$

Důkaz. Podle (1.7.2) (pro kompaktní množinu $\{x, y\}$) existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$c^{-1}h(y) \leq h(x) \leq c\,h(y), \qquad h \in \mathcal{H}^+(U).$$

Je-li $A \subset \partial U$ borelovská množina, je funkce $f = 1_A$ resolutivní a platí $Hf(x) = \mu_x(A)$, $Hf(y) = \mu_y(A)$. Nyní aplikujeme předchozí nerovnosti na funkci $h = Hf$. □

3.3.6. Korolár. *Nechť $A \subset \partial U$ je borelovská množina. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje $x \in U$ tak, že $\mu_x(A) = 0$;*

(ii) *pro každé $y \in U$ je $\mu_y(A) = 0$.*

Důkaz. Plyne okamžitě z (3.3.5). □

Budeme říkat, že borelovská množina $A \subset \partial U$ má *harmonickou míru nula*, platí-li některá z podmínek z (3.3.6).

3.3.7. Věta. *Nechť $A \subset \partial U$ je borelovská množina. Potom A má harmonickou míru nula, právě když existuje $u \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že*

$$\lim_{x \to z} u(x) = \infty$$

pro všechna $z \in A$.

Důkaz. Nechť A má harmonickou míru nula. Potom $H1_A = 0$. Volme $y \in U$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ volme $u_n \in \mathcal{U}(1_A)$ tak, aby $u_n(y) \leq 2^{-n}$. Potom je $u_n \geq 0$ a pro $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ platí $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Protože $u(y) \leq 1$, je $u \in \mathcal{S}^+(U)$. Nechť $z \in A$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq \liminf_{x \to z} \sum_{n=1}^{k} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{k} \liminf_{x \to z} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{k} 1_A(z) = k.$$

Odtud $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$.

Nechť $u \in \mathcal{S}^+(U)$ a $\lim_{x \to z} u(x) = \infty$, kdykoli $z \in A$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\varepsilon \cdot u \in \mathcal{U}(1_A)$, takže $0 \leq H1_A \leq \varepsilon \cdot u$. Zvolme $y \in U$ tak, aby $u(y) < \infty$. Pak $H1_A(y) = 0$, neboli $\mu_y(A) = 0$. □

3.3.8. Korolár. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ a nechť borelovská množina $A \subset \partial U$ má harmonickou míru nula. Jestliže v je zdola omezená hyperharmonická funkce na U a*

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq f(z), \qquad z \in \partial U \setminus A,$$

potom $\overline{H} f \leq v$.

Speciálně: Je-li $h \in \mathcal{H}(U)$ omezená a

$$\lim_{x \to z} h(x) = 0, \qquad z \in \partial U \setminus A,$$

potom $h = 0$.

Důkaz. Nechť u je funkce s vlastnostmi z (3.3.7) a $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $z \in \partial U$ platí $\liminf_{x \to z} (v + \varepsilon u)(x) \geq f(z)$, tudíž $\overline{H} f \leq v + \varepsilon u$. Podle (2.3.2) je $u < \infty$ λ-skoro všude na U, tedy $\overline{H} f \leq v$ λ-skoro všude. Podle (2.2.11) platí tato nerovnost všude. □

3.4 Hraniční chování PWB-řešení

Nechť $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast, $z \in \partial U$. Říkáme, že z je *regulární bod*, jestliže pro každou $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $Hf(x) \to f(z)$ pro $x \to z$. (Jinak řečeno: z je regulární, jestliže $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$.) Množinu regulárních bodů označíme $\partial_r U$ a definujeme

$$\partial_{irr} U = \partial U \setminus \partial_r U.$$

Body z $\partial_{irr} U$ se nazývají *iregulární*. Zřejmě je U regulární, právě když $\partial U = \partial_r U$.

3.4.1. Věta. *Nechť $z \in \partial U$ a $d : x \to |x - z|$, $x \in \partial U$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$z \in \partial_r U$;*

(ii) *je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ shora omezená, potom*

$$\limsup_{x \to z} \overline{H} f(x) \leq \limsup_{y \to z} f(y);$$

(iii) *existuje $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $h(x) \to 0$ pro $x \to z$ a*

$$\liminf_{x \to z'} h(x) > 0 \qquad \text{pro každé } z' \in \partial U \setminus \{z\}.$$

(iv) $\lim_{x \to z} Hd(x) = 0$.

Důkaz. Implikace (i)$\Rightarrow$(iv) a (ii)$\Rightarrow$(i) jsou zřejmé. Definujme $v(x) = |x - z|$, $x \in \mathbb{R}^m$ a dokažme implikaci (iv)$\Rightarrow$(iii). Podle (2.2.6 (h)) je $v \in -\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Proto na množině U platí $v \leq \underline{H}d = Hd$. Položíme-li $h = Hd$, platí $h(x) \to 0$ pro $x \to z$ podle předpokladu. Jestliže $z' \in \partial U \setminus \{z\}$, pak

$$\liminf_{x \to z'} h(x) \geq \liminf_{x \to z'} v(x) = |z - z'| > 0.$$

Zbývá dokázat implikaci (iii)$\Rightarrow$(ii). Označme

$$m = \sup f(\partial U), \qquad c = \limsup_{y \to z} f(y)$$

a volme $\varepsilon > 0$. Existuje okolí V bodu z tak, že $\sup f(\partial U \cap V) < c + \varepsilon$. Protože je funkce

$$k : y \to \liminf_{x \to y} h(x), \qquad y \in \partial U,$$

zdola polospojitá na $\partial U \setminus V$, je číslo $q = \inf k(\partial U \setminus V)$ kladné. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platila nerovnost $c + \varepsilon + \delta q \geq m$ a definujme na U funkci $u = c + \varepsilon + \delta h$. Ukažme, že u je horní funkce k funkci f. Je-li totiž $y \in \partial U \cap V$, je

$$\liminf_{x \to y} u(x) = c + \varepsilon + \delta k(y) \geq c + \varepsilon > f(y),$$

zatímco pro $z \in \partial U \setminus V$ je

$$\liminf_{x \to y} u(x) = c + \varepsilon + \delta k(y) \geq c + \varepsilon + \delta q \geq m \geq f(y).$$

Zřejmě

$$\liminf_{x \to y} u(x) > -\infty$$

pro každé $y \in \partial U$. Protože u je horní funkce k funkci f, je $\overline{H}f \leq u$, takže

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}f(x) \leq \limsup_{x \to z} u(x) = c + \varepsilon + \delta \limsup_{x \to z} h(x) = c + \varepsilon.$$

Odtud plyne, že

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}f(x) \leq \limsup_{y \to z} f(y).$$

$\square$

3.4.2. Korolár. *Nechť $z \in \partial_r U$ a $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je omezená resolutivní funkce spojitá v bodě z. Potom*

$$\lim_{x \to z} Hf(x) = f(z).$$

Důkaz. Plyne ihned z (3.4.1 (ii)). $\square$

3.4.3. Korolár. *Nechť $z \in \partial U$ a nechť existuje $a \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ tak, že $\overline{U} \cap \overline{B_r(a)} = \{z\}$. Potom $z \in \partial_r U$.*

Důkaz. Pro $x \in U$ definujme $h(x) = N(a, z) - N(x, a)$. Potom $h \in \mathcal{H}(U)$, $h(x) \to 0$ pro $x \to z$, a pro $z' \in \partial U \setminus \{z\}$

$$\liminf_{x \to z'} h(x) = \lim_{x \to z'} h(x) = N(a, z) - N(z', a) > 0.$$

Podle (3.4.1 (iii)) je $z \in \partial_r U$. $\square$

3.4.4. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $z \in \partial_r U$;

(ii) *existuje otevřená množina V obsahující bod z a kladná funkce $u \in \mathcal{S}(U \cap V)$ taková, že $u(x) \to 0$ pro $x \to z$.*

Důkaz. Implikace (i)⇒(ii) je důsledkem (3.4.1). Nechť platí (ii). Lze předpokládat, že $V = B_r(z)$, $U \setminus V \neq \emptyset$ a u je na $U \cap V$ omezená (jinak bychom vzali např. $\min(1, u)$). Jestliže d má stejný význam jako v (3.4.1), stačí podle (3.4.1) dokázat, že $Hd(x) \to 0$ pro $x \to z$.

Označme $m = \sup d(\partial U)$ a zvolme $0 < \varrho < r$. Kdyby $S_\varrho(z) \cap U = \emptyset$, pak by množina $B_\varrho(z) \cap U \neq \emptyset$ byla otevřená i uzavřená v U. Protože U je oblast, platilo by

$$U = B_\varrho(z) \cap U \subset B_r(z),$$

což není možné. Proto $S_\varrho(z) \cap U \neq \emptyset$, kdykoli $0 < \varrho < r$.

Uvažujme nyní $0 < \varrho < r$ a zvolme $C \subset S_\varrho(z) \cap U$ kompaktní tak, aby $\sigma_{z,\varrho}(C) > 0$ a pro $T = (S_\varrho(z) \cap U) \setminus C$ platilo $\sigma_{z,\varrho}(T) \leq \frac{\varrho}{m}$. Položme $q = \inf u(C)$, $g(y) = m 1_T(y)$ pro $y \in B_\varrho(z)$ a k nechť je Poissonův integrál funkce g na $B_\varrho(z)$. Potom $q > 0$ a

$$k(z) = \int g \, d\sigma_{z,\varrho} = m \, \sigma_{z,\varrho}(T) \leq \varrho.$$

Nechť s je dolní funkce k funkci d. Protože $d \leq m$, je $m \in \mathcal{U}(d)$, takže $s \leq m$ na U. Položme $W = B_\varrho(z) \cap U$ a pro $x \in W$ definujme

$$t(x) = s(x) - \varrho - \frac{m}{q} u(x) - k(x).$$

Potom leží t v $-\mathcal{S}(W)$; ukážeme dále, že $t \leq 0$. Pak se důkaz dokončí takto: jelikož $s \leq \varrho + (m/q)u + k$ na W, je $Hd \leq \varrho + (m/\varrho)u + k$ na W, tudíž

$$\limsup_{x \to z} Hd(x) \leq \varrho + k(z) \leq 2\varrho.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $\varrho \in]0, r[$, je $Hd(x) \to 0$ pro $x \to z$.

Zbývá dokázat, že $t \leq 0$. Podle principu maxima pro subharmonické funkce stačí ukázat, že

$$\limsup_{x \to y} t(y) \leq 0, \text{ kdykoli } y \in \partial W = (\partial U \cap B_\varrho(z)) \cup (S_\varrho(z) \cap U).$$

Jestliže $y \in \partial U \cap B_\varrho(z)$, platí

$$\limsup_{x \to y} s(x) \leq d(y) = |y - z| \leq \varrho,$$

takže

$$\limsup_{x \to y} t(x) \leq \limsup_{x \to y} s(x) - \varrho \leq 0,$$

neboť u, k jsou nezáporné funkce na W.

Nechť $y \in S_\varrho(z) \cap U$ a $c = \limsup_{x \to y} t(x)$. Podle (3.4.1) (kterou aplikujeme na $B_\varrho(z)$, jejíž všechny hraniční body jsou regulární) je

$$\liminf_{x \to y} k(x) \geq \liminf_{p \to y} g(p).$$

Proto

$$c \le \limsup_{x\to y, x\in W} s(x) - \varrho - \frac{m}{q} \liminf_{x\to y, y\in W} u(x) - \liminf_{x\to y} k(x) \le$$

$$\le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} u(y) - \liminf_{p\to y} g(p).$$

Jestliže $y \in T$, je $\liminf_{p\to y} g(p) = m$, takže

$$c \le s(y) - m - \varrho - \frac{m}{q} u(y) \le 0\,,$$

neboť $s \le m$ a $u(y) > 0$. Jestliže $y \in C$, je $g(y) = 0$, takže $\liminf_{p\to y} g(p) = 0$. Platí tudíž

$$c \le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} u(y) \le s(y) - \varrho - \frac{m}{q} \inf u(C) = s(y) - \varrho - m \le -\varrho \le 0\,,$$

neboť $s(y) \le m$. Tím je dokázáno, že $c \le 0$. □

3.4.5. Korolár. *Nechť U_1, U_2 jsou omezené oblasti, $z \in \partial U_1 \cap \partial U_2$ a nechť existuje V otevřená množina taková, že $z \in V$ a $U_1 \cap V \subset U_2 \cap V$. Je-li $z \in \partial_r U_2$, je $z \in \partial_r U_1$.*

Důkaz. Plyne z (3.4.4). □

Zavedeme toto označení. Pro $c > 0$ označíme

$$T(c) = \Big\{ x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m;\ \Big(\sum_{j=1}^{m-1} x_j^2 \Big)^{1/2} \le c\, x_m \Big\}\,.$$

(Geometricky $T(c)$ je kužel s vrcholem v počátku a osou rovnoběžnou s osou x_m.)

3.4.6. Lemma. *Nechť $c > 0$, $r > 0$ a $U = B_r(0) \setminus T(c)$. Nechť dále $d(z) = |z|$, $z \in \partial U$ a $h = Hd$. Potom $h > 0$ na U a $h(x) \to 0$ pro $x \to 0$.*

Důkaz. Položme $h = d$ na ∂U. Je-li $z \in \partial U$, $|z| = r$, potom $z \in \partial_r U$ podle (3.4.3). Odtud snadno plyne, že $h > 0$ na U podle (1.5.3).

Zvolme $\alpha \in (0,1)$. Položme

$$U_\alpha = \alpha U = \{\alpha x; x \in U\}.$$

Označme $m = \sup h(\partial U_\alpha \cap S_{\alpha r}(0))$. Podle (3.4.3) je $\partial U \cap S_{\alpha r}(0) \subset \partial_r U$, takže $m \ge \alpha r$. Kdyby $m = r$, podle (1.5.3) by h byla konstantní. Platí tedy $r > m \ge \alpha r$. Pro $x \in \overline{U_\alpha} \setminus \{0\}$ definujme

$$u(x) = r h(x) - m\, h(x/\alpha).$$

Potom $u|_{U_\alpha}$ je omezená harmonická funkce a u je spojitá v každém bodě $z \in \partial U_\alpha \setminus \{0\}$. Je-li $z \in \partial U_\alpha$, $|z| = \alpha r$, pak $h(z) \le m$, $h(z/\alpha) = r$, takže $u(z) \le rm - mr = 0$. Je-li $z \in \partial U_\alpha$, $0 < |z| < \alpha r$, pak $h(z) = |z|$, $h(z/\alpha) = |z|/\alpha$, takže

$$u(z) = r|z| - m\,\frac{|z|}{\alpha} = \frac{|z|}{\alpha}(\alpha r - m) \le 0.$$

Podle (2.2.7) je $u \le 0$ na $\overline{U_\alpha} \setminus \{0\}$. Odtud

$$r \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x) \le m \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x/\alpha) = m \limsup_{x\to 0,\, x\ne 0} h(x).$$

Odtud $\limsup_{x\to 0,\, x\in U} h(x) = 0$, neboť $r > m$. □

3.4.7. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Jestliže existuje $c > 0$, $r > 0$ a takové izometrické zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, že $\varphi(0) = z$ a*

$$\overline{\varphi(T(c) \cap B_r(0))} \cap \overline{U} = \{z\},$$

potom $z \in \partial_r U$.

Důkaz. Plyne z (3.4.6) a (3.4.4). □

3.4.8. Věta. *Nechť $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $z \in \partial U$, S nedegenerovaná úsečka s koncovým bodem z a nechť $U \cap S = \emptyset$. Potom $z \in \partial_r U$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$U = B_1(0) \setminus \{(x, 0); 0 \leq x \leq a\}, \qquad a > 0$$

a uvažovat množinu U jako podmnožinu $\mathbb{C}$. Nechť $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce, pro niž $\exp f(z) = z$, $z \in U$ (jednoznačná větev logaritmu). Protože $|z| < 1$ pro $z \in U$, je $f(z) \neq 0$, takže

$$h(z) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{f(z)}\right), \qquad z \in U,$$

je harmonická na U. Nechť u, v jsou reálné funkce na U, pro něž $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in U$. Potom pro $z \in U$ platí

$$1 > |z| = |\exp f(z)| = \exp u(z),$$

takže $u(z) < 0$ a $u(z) \to -\infty$ pro $z \to 0$. Protože

$$h(z) = -\frac{u(z)}{u^2(z) + v^2(z)}, \qquad z \in U,$$

je $h > 0$ na U, a protože $h(z) \leq -1/u(z)$, $z \in U$, je $h(z) \to 0$ pro $z \to 0$. Podle (3.4.4) je $0 \in \partial_r U$. □

3.5 Greenova funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast. Pro $x \in U$ definujeme na U funkci

$$G_x = N_x - H(N_x)|_{\partial U}.$$

(Připomeňme, že funkce $N_x : y \mapsto N(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, byla zavedena za (1.9.1).) Funkce G_x se nazývá *Greenova funkce množiny U s pólem v bodě x.* Zřejmě $G_x \in \mathcal{S}(U)$, $G_x(x) = \infty$ a $G_x > 0$ na U. Dále pro $z \in \partial U$ platí $\lim_{y \to z} G_x(y) = 0$, právě když $z \in \partial_r U$.

3.5.1. Věta. *Funkce $H(N_x)|_{\partial U}$ je největší subharmonická minoranta funkce $(N_x)_{|U}$.*

Důkaz. Nechť $v \in -\mathcal{S}(U)$ a $v \leq (N_x)_{|U}$. Protože v je dolní funkce k $(N_x)_{|U}$, platí $H(N_x)|_{\partial U} \geq v$. □

3.5.2. Poznámka. Pro speciální případ $U = B_r(0)$ a pro $x \in U$ je v (1.9.6) uvedeno explicitní vyjádření funkce G_x; viz též (1.9.9).

3.5.3. Věta. *Pro $x, y \in U$ platí rovnost $G_x(y) = G_y(x)$.*

Důkaz. Vzhledem k symetrii bodů x a y stačí dokázat, že $H((N_y)_{|\partial U})(x) \leq H((N_x)_{|\partial U}(y)$. Pro každé $w \in U$ je zřejmě $H((N_w)|_{\partial U})(x) \leq N_w(x) = N_x(w)$, takže funkce

$$w \mapsto H((N_w)|_{\partial U})(x)$$

je harmonická minoranta funkce $(N_x)_{|U}$. Proto $H((N_y)_{|\partial U})(x) \leq H((N_x)_{|\partial U}(y)$. $\square$

Funkce $G : U \times U \to (0, \infty\rangle$ definovaná rovností $G(x,y) = G_x(y)$, $(x,y) \in U \times U$, se nazývá *Greenovo jádro* množiny U.

Víme, že pro každé $y \in U$ platí $H((N_x)_{|\partial U})(y) = H((N_y)_{|\partial U}(x) = \int N_y d\mu_x = N\mu_x(y)$. Pravá strana rovnosti $G_x = N_x - N\mu_x$ proto umožňuje funkci G_x přirozeným způsobem rozšířit na funkci definovanou na $\mathbb{R}^m$. Snadno je vidět, že potom je $G_x = 0$ na $\mathbb{R}^m \setminus \overline{U}$. Skutečně, je-li $y \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{U}$, je funkce N_y harmonická na okolí množiny $\overline{U}$, tudíž $N\mu_x(y) = \int N_y \, d\mu_x = N_y(x) = N_x(y)$, neboli $G_x(y) = 0$. Funkce G_x je ovšem subharmonická na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$, tedy shora polospojitá. Platí proto $G_x(z) = \limsup_{y \to z} G_x(y)$ pro každé $z \in \partial U$. Následující věta je důležitým upřesněním této rovnosti.

3.5.4. Věta. *Nechť $z \in \partial U$. Potom $G_x(z) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y)$.*

Důkaz. Zřejmě $G_x(z) = \limsup_{y \to z} G_x(y) \geq \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y)$. Nechť g je funkce rovna G_x na U a rovna nule na $\mathbb{R}^m \setminus U$. Dokážeme, že pro $0 < r < |x - z|$ platí rovnost

$$(*) \qquad \int G_x \, d\lambda_{z,r} = \int g \, d\lambda_{z,r}.$$

Důkaz se pak dokončí takto: podle (2.2.9) platí

$$\begin{aligned} G_x(z) &= \lim_{r \to 0+} \int G_x \, d\lambda_{z,r} = \lim_{r \to 0+} \int g \, d\lambda_{z,r} \leq \\ &\leq \lim_{r \to 0+} \sup g\,(U \cap B_r(z)) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} g(y) = \limsup_{y \to z, \, y \in U} G_x(y). \end{aligned}$$

Dokažme nyní rovnost $(*)$. Označme ν restrikci Lebesgueovy míry na ∂U. Stačí ukázat, že $G_x = 0$ ν-skoro všude. Podle (2.2.6(g)) je potenciál $N\nu$ spojitý v $\mathbb{R}^m$ a $(N\nu)_{|U} \in \mathcal{H}(U)$. Proto platí

$$\begin{aligned} \int G_x d\nu &= N\nu(x) - \int N\mu_x d\nu = N\nu(x) - \int N\nu d\mu_x = \\ &= N\nu(x) - H((N\nu)_{|\partial U})(x) = 0 \end{aligned}$$

Tudíž $\nu(\{z \in \partial U \, ; \, G_x(z) > 0\}) = 0$. $\square$

3.5.5. Věta. *Nechť μ je Radonova míra, pro niž $\operatorname{spt}(\mu) \subset U$ a $z \in \partial_r U$. Potom platí $\lim_{x \to z} \int G_x \, d\mu = 0$.*

Důkaz. Označme $K = \operatorname{spt}(\mu)$, zvolme oblast V takovou, že $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ a zvolme $w \in K$. Zřejmě $\{(G_x)|_V ; \, x \in U \setminus \overline{V}\} \subset \mathcal{H}^+(V)$, takže podle (1.7.2) existuje $c > 0$ takové, že $G_x(y) \leq c \cdot G_x(w)$, kdykoli $x \in U \setminus \overline{V}$ a $y \in K$. Jelikož $z \in \partial_r U$, platí $\lim_{x \to z} G_w(x) = 0$, tudíž $\lim_{x \to z} \sup\{G_x(y); \, y \in K\} = 0$. Odtud ihned vyplývá rovnost $\lim_{x \to z} \int G_x \, d\mu = 0$. $\square$

3.6 Množina iregulárních bodů

V tomto odstavci je opět U omezená oblast v $\mathbb{R}^m$.

3.6.1. Věta. *Množina $\partial_{irr}U$ je typu K_σ, tj. existují kompaktní množiny K_n takové, že $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Důkaz. Zvolme $x \in U$. Z definice regulárního bodu, z (3.4.4) a (3.5.4) plyne, že

$$\partial_r U = \{z \in \partial U;\ G_x(z) = 0\}.$$

Položme $K_n = \{z \in \partial U;\ G_x(z) \geq 1/n\}$. Potom $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ a K_n jsou kompaktní, neboť K_n je omezená a uzavřená. (Připomeňme, že G_x je subharmonická, tudíž shora polospojitá na $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$.) □

Ukážeme, že množina iregulárních bodů oblasti U je v jistém potenciálně-teoretickém smyslu zanedbatelná. Kvantitativní vyjádření tohoto faktu je založeno na pojmu kapacity.

Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina. Označme $\mathcal{M}(K)$ množinu všech Radonových měr μ v $\mathbb{R}^m$, pro něž $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$.

Definujme

$$\operatorname{cap}(K) = \sup\{\mu(K);\ \mu \in \mathcal{M}(K),\ N\mu \leq 1\}.$$

Číslo $\operatorname{cap}(K)$ se nazývá *kapacita* množiny K. Pro $M \subset \mathbb{R}^m$ položme

$$\operatorname{cap}(M) = \sup\{\operatorname{cap}(K);\ K \subset M \text{ kompaktní}\}.$$

Číslo $\operatorname{cap}(M)$ se pak nazývá *vnitřní kapacita* množiny M.

3.6.2. Věta. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K) > 0$. Potom existuje nenulová míra $\nu \in \mathcal{M}(K)$ taková, že potenciál $N\nu$ je spojitý.*

Důkaz. Z definice kapacity vyplývá existence nenulové míry $\mu \in \mathcal{M}(K)$ takové, že potenciál $N\mu$ je shora omezený. Existence míry ν s požadovanými vlastnostmi nyní vyplývá ihned z (2.8.3). □

3.6.3. Věta. *Pro množinu iregulárních bodů oblasti U platí $\operatorname{cap}(\partial_{irr}U) = 0$.*

Důkaz. Zvolme $x \in U$ a označme opět $K_n = \{z \in \partial U;\ G_x(z) \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\partial_{irr}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, stačí dokázat, že $\operatorname{cap}(K_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každou kompaktní množinu $K \subset \partial_{irr}U$ totiž existuje, jak se snadno nahlédne, $n \in \mathbb{N}$, pro které $K \subset K_n$.

Předpokládejme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{cap}(K_n) > 0$; odvodíme spor. Z (3.6.2) plyne existence míry $\nu \in \mathcal{M}(K_n)$ takové, že $\nu(\mathbb{R}^m) = 1$ a potenciál $N\nu$ je spojitý. Potom ovšem na U platí rovnost $H((N\nu)|_{\partial U}) = N\nu$, tudíž

$$\begin{aligned} 1/n \;&\leq\; \int G_x\, d\nu = \int (N_x - N\mu_x)\, d\nu = N\nu(x) - \int N\nu\, d\mu_x = \\ &=\; N\nu(x) - H\left((N\nu)|_{\partial U}\right)(x) = N\nu(x) - N\nu(x) = 0, \end{aligned}$$

což je spor. □

3.6.4. Lemma. *Nechť μ je Radonova míra s kompaktním nosičem K. Potom*

$$\begin{aligned} &\sup N\mu(\mathbb{R}^m) \leq \sup N\mu(K) + (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(K), && \textit{pokud } m = 2 \textit{ a} \\ &\sup N\mu(\mathbb{R}^m) \leq 2^{m-2} \sup N\mu(K), && \textit{pokud } m > 2. \end{aligned}$$

Důkaz. Zřejmě lze předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ zvolme, podobně jako v (2.8.1), $\pi(x) \in K$ takové, že $|x - \pi(x)| \leq |x - y|$, kdykoli $y \in K$. Potom pro každé $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \leq 2|y - x|$, tudíž

$$\begin{array}{ll} N(\pi(x), y) \geq N(x, y) - (1/2\pi) \log\, 2 & \text{v případě } m = 2, \\ N(\pi(x), y) \geq 2^{2-m} N(x, y) & \text{v případě } m > 2. \end{array}$$

Odtud již tvrzení snadno vyplývá. □

3.6.5. Lemma. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina taková, že* $\operatorname{cap}(K) = 0$ *a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje Radonova míra ν taková, že* $\operatorname{spt}(\nu) \cap K = \emptyset$, $\nu(\mathbb{R}^m) < \varepsilon$ *a* $N\nu > 1$ *na K.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Nechť V je otevřená koule se středem v počátku obsahující množinu K. Zvolme kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že K_n je konečné sjednocení uzavřených koulí, K je částí vnitřku množiny K_n, K_{n+1} je obsažena ve vnitřku množiny K_n, $K_1 \subset V$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$. Z vyjádření Greenovy funkce G_x množiny V s pólem x uvedeného v (1.9.6) plyne existence $a > 0$ takového, že pro každé $x \in K_1$ na K_1 platí nerovnosti

$$N_x - a \leq G_x \leq N_x + a.$$

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je U_n komponenta množiny $V \setminus K_n$, pro kterou je $\partial V \subset \partial U_n$. Potom je U_n oblast, $\partial U_n \subset \partial V \cup \partial K_n$ a podle (3.4.3) je každý bod hranice oblasti U_n regulární.

Položme $f_n = 0$ na ∂V a $f_n = a + 1$ na ∂U_n. Označme h_n řešení Dirichletovy úlohy na U_n příslušné okrajové podmínce f_n. Položíme-li $s_n = h_n$ na U_n a $s_n = a + 1$ na $V \setminus U_n$, dostáváme spojitou funkci na V, pro niž $0 \leq s_n \leq a + 1$. Z (2.2.5) vyplývá, že $s_n \in \mathcal{S}(V)$. Položme $\nu_n = -\Delta s_n$. Z (2.6.5), (2.6.2) a (1.5.3) vyplývá, že ν_n je nenulová míra, pro niž $\operatorname{spt} \nu_n \subset \partial K_n \subset K_1$.

Nechť μ_x je harmonická míra příslušná oblasti V a bodu x, takže $G_x = N_x - N\mu_x$. Definujme funkce $u_n \colon x \mapsto \int G_x \, d\nu_n$, $g_n \colon x \mapsto \int N\mu_x \, d\nu_n$, $x \in V$. Protože

$$g_n(x) = \int N\nu_n \, d\mu_x\,, \quad x \in V\,,$$

je $g_n \in \mathcal{H}(V)$ a tudíž $\Delta g_n = 0$. Dále podle (2.6.3) platí $\Delta u_n = \Delta(N\nu_n) + \Delta g_n = -\nu_n$, neboli $\Delta(u_n - s_n) = 0$. Podle (2.6.2) existuje funkce $k_n \in \mathcal{H}(V)$ taková, že rovnost $u_n - s_n = k_n$ platí λ-skoro všude na V. Superharmonické funkce $s_n + k_n$ a $u_n = N\nu_n - g_n$ se tudíž podle (2.2.11) rovnají všude na V. Protože pro každé $z \in \partial V$ platí $\lim_{x \to z} s_n(x) = 0$ a podle (3.5.5) platí $\lim_{x \to z} u_n(x) = 0$, je $k_n = 0$ na V.

Jelikož $u_n = s_n$ a $N_x - a \leq G_x \leq N_x + a$ na K_1, kdykoli $x \in K_1$, platí na K_1 nerovnost $|s_n - N\nu_n| \leq a \cdot \nu_n(K_n)$. Označme $a_n = \nu_n(K_n)$ a definujme $\mu_n = \nu_n / a_n$. Jelikož $s_n \leq a + 1$, platí na K_1 nerovnost

$$N\mu_n \leq a + (a + 1)/a_n.$$

Můžeme předpokládat, že posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravděpodobnostních měr konverguje slabě k míře μ (jinak bychom přešli k vybrané posloupnosti). Potom $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a $\mu(K) = 1$. Je-li $c > 0$ a $N_x^{(c)} = \min(N_x, c)$, $x \in \mathbb{R}^m$, potom pro každé $x \in K_1$ platí

$$\begin{aligned} \int N_x^{(c)} \, d\mu \;&=\; \lim_{n \to \infty} \int N_x^{(c)} \, d\mu_n \leq \liminf_{n \to \infty} \int N_x \, d\mu_n = \\ &=\; \liminf_{n \to \infty} N\mu_n(x) \leq a + (a + 1) \cdot \liminf_{n \to \infty} (1/a_n). \end{aligned}$$

Odtud dostáváme nerovnost $N\mu \le a + (a+1)\cdot \liminf_{n\to\infty}(1/a_n)$ na K_1.

Kdyby $\liminf_{n\to\infty}(1/a_n) < \infty$, byl by potenciál $N\mu$ omezený na K_1 a tedy podle (3.6.4) všude v $\mathbb{R}^m$ a dostali bychom $\operatorname{cap}(K) > 0$. Dokázali jsme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n < \min(\varepsilon, 1)$ a položme $\nu = \nu_n$. Pak $\operatorname{spt}(\nu) \cap K = \emptyset$ a $\nu(\mathbb{R}^m) < \varepsilon$. Protože na K platí $s_n = a+1$ a $|s_n - N\nu_n| \le a\cdot\nu_n(K_n) < a$, je $N\nu = N\nu_n > 1$ na K. □

Nechť μ je Radonova míra v $\mathbb{R}^m$. Budeme říkat, že μ je diskrétní, jestliže $\operatorname{spt}(\mu)$ je konečná množina. Připomínáme tento výsledek: Je-li μ Radonova míra s kompaktním nosičem, potom existují diskrétní míry μ_n takové, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset \operatorname{spt}(\mu)$, $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \mu(\mathbb{R}^m)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a míry μ_n konvergují slabě pro $n \to \infty$ k míře μ.

3.6.6. Lemma. *Nechť ν je Radonova míra s kompaktním nosičem, $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina taková, že $K \cap \operatorname{spt}(\nu) = \emptyset$ a nechť $\delta > 0$. Potom existuje diskrétní míra κ taková, že $\operatorname{spt}(\kappa) \subset \operatorname{spt}(\nu)$, $\kappa(\mathbb{R}^m) = \nu(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\kappa > N\nu - \delta$.*

Důkaz. Zvolme omezenou oblast V takovou, že $K \subset V \subset \overline{V} \subset \mathbb{R}^m \setminus \operatorname{spt}(\nu)$. Zvolme diskrétní míry κ_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\operatorname{spt}(\kappa_n) \subset \operatorname{spt}(\nu)$ a κ_n konvergují pro $n \to \infty$ slabě k míře ν. Protože $\overline{V} \cap \operatorname{spt}(\nu) = \emptyset$, je $\{(N_x)_{|V}\,;\, x \in \operatorname{spt}(\nu)\}$ stejně omezená množina harmonických funkcí a tudíž totéž platí pro množinu $\{(N\kappa_n)_{|V}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Pro každé $x \in X$ zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} N\kappa_n(x) = N\nu(x)$. Z (1.8.4) vyplývá, že $N\kappa_n$ konvergují pro $n \to \infty$ k $N\nu$ stejnoměrně na K. Existuje tudíž $n \in \mathbb{N}$ takové, že $N\kappa_n > N\nu - \delta$ na K, takže stačí položit $\kappa = \kappa_n$. □

3.6.7. Lemma. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná kompaktní množina a κ je diskrétní míra. Potom existuje diskrétní míra μ taková, že $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$, $\mu(\mathbb{R}^m) = \kappa(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\mu \ge 2^{2-m} N\kappa - (1/2\pi)\log 2 \cdot \mu(\mathbb{R}^m)$.*

Důkaz. Označme $L = \operatorname{spt}(\kappa)$ a uvažujme $x \in L$. Zvolme, podobně jako v (2.8.1), $\pi(x) \in K$ takové, že

$$|x - \pi(x)| \le |x - y|\,,$$

kdykoli $y \in K$. Potom pro každé $y \in K$ platí $|y - \pi(x)| \le 2|y - x|$. Odtud plyne, že pro všechna $y \in K$ je splněna nerovnost

$$N\left(\pi(x), y\right) \ge 2^{2-m} N(x, y) - (1/2\pi)\log 2.$$

Podle předpokladu existují čísla $a(x) > 0$, $x \in L$, taková že $\kappa = \sum_{x\in L} a(x)\cdot\varepsilon_x$ (připomeňme, že ε_x je Diracova míra soustředěná v bodě x). Definujme $\mu = \sum_{x\in L} a(x)\cdot\varepsilon_{\pi(x)}$. Potom $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$ a $\mu(\mathbb{R}^m) = \sum_{x\in L} a(x) = \kappa(\mathbb{R}^m)$. Tvrzení je nyní zřejmé. □

3.6.8. Věta. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K) = 0$. Potom existuje Radonova míra μ tak, že $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$ a pro každé $z \in K$ platí $\lim_{x\to z} N\mu(x) = \infty = N\mu(z)$.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $K \ne \emptyset$. Podle (3.6.5) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje Radonova míra ν_n taková, že $\nu_n(\mathbb{R}^m) < 2^{-n}$, $\operatorname{spt}(\nu_n) \cap K = \emptyset$ a $N\nu_n > 1$ na K. Podle (3.6.6) existuje diskrétní míra κ_n taková, že $\kappa_n(\mathbb{R}^m) = \nu_n(\mathbb{R}^m)$ a na K je splněna nerovnost $N\kappa_n > 1$. Označme $V_n = \{x \in \mathbb{R}^m;\, N\kappa_n(x) > 1\}$. Potom V_n je otevřená množina obsahující K. Užitím (3.6.7) dostáváme diskrétní míru μ_n takovou, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset K$, $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \kappa_n(\mathbb{R}^m)$ a na K platí nerovnost

$$N\mu_n \ge 2^{2-m} N\kappa_n - (1/2\pi)\log 2\cdot \mu_n(\mathbb{R}^m)\,.$$

Definujme $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Potom μ je Radonova míra, $\operatorname{spt}(\mu) \subset K$. Pro každé $r \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \bigcap_{n=1}^{r} V_n$ dostáváme

$$\begin{aligned} N\mu(x) &\geq 2^{2-m} \sum_{n=1}^{r} N\kappa_n(x) - (1/2\pi)\log 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\mathbb{R}^m) \geq \\ &\geq 2^{2-m} r - (1/2\pi)\log 2. \end{aligned}$$

Pro každé $z \in K$ proto platí $\lim_{x\to z} N\mu(x) = \infty = N\mu(z)$. □

3.6.9. Věta. *Nechť $M \subset \partial U$ je borelovská množina a $\operatorname{cap}(M) = 0$. Potom má M harmonickou míru 0. Speciálně: $\partial_{irr} U$ má harmonickou míru 0.*

Důkaz. Nechť $K \subset M$ je kompaktní. Stačí dokázat, že K má harmonickou míru nula. Zvolme $x \in U$. Z (3.6.8) víme, že existuje míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a číslo $b \geq 0$ takové, že $N\mu + b \geq 0$ na U a pro každé $z \in K$ platí $\lim_{x\to z} (N\mu(x) + b) = \infty$. Protože pro každé $\varepsilon > 0$ je $(\varepsilon(N\mu + b))\,|_U \in \mathcal{U}(1_K)$, je zřejmě $\mu_x(K) = H1_K(x) = 0$. □

3.6.10. Věta. *Existuje funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že pro všechna $z \in \partial_{irr} U$ platí*

$$\lim_{x\to z} k(x) = \infty\,.$$

Důkaz. Zvolme $y \in U$ a pro $n \in \mathbb{N}$ definujme stejně jako v (3.6.1) množinu

$$K_n = \{z \in \partial U;\, G_y(z) \geq 1/n\}\,.$$

Víme (srv. s (3.6.3)), že K_n je kompaktní množina a $\operatorname{cap}(K_n) = 0$. Podle (3.6.8) tudíž existuje míra $\mu_n \in \mathcal{M}(K_n)$ taková, že $\lim_{x\to z} N\mu_n(x) = \infty$, kdykoli $z \in K_n$. Zvolme čísla $a_n > 0$ a $b_n > 0$ taková, že $N\mu_n + b_n \geq 0$ na U a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(N\mu_n(y) + b_n) < \infty$. Potom pro funkci $u = \sum a_n(N\mu_n + b_n)$ zřejmě platí $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ a $u|_U \in \mathcal{H}^+(U)$. Je-li $z \in \partial_{irr} U$, pak pro vhodné $n \in \mathbb{N}$ platí $z \in K_n$, a proto

$$\liminf_{x\to z,\, x\in U} u(x) \geq \liminf_{x\to z} a_n\,(N\mu_n(x) + b_n) = \infty.$$

Stačí položit $k = u|_U$. □

3.6.11. Věta. *Nechť M je borelovská podmnožina ∂U. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *M má harmonickou míru nula;*

(ii) *existuje funkce $k_0 \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že pro každé $z \in M$ platí $\lim_{x\to z} k_0(x) = \infty$.*

Důkaz. Zvolme $y \in U$. Z (3.3.7) dostáváme, že podmínka (ii) implikuje (i).

Nechť M má harmonickou míru 0. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina V_n tak, že $M \subset V_n \cap \partial U$ a $\mu_y(V_n \cap \partial U) \leq 2^{-n}$. Podle (1.8.3) pro funkci $g_0 = \sum_{n=1}^{\infty} H1_{V_n\cap\partial U}$ platí $g_0 \in \mathcal{H}^+(U)$. Je-li $z \in M \cap \partial_r U$, pak zřejmě z (3.4.1) plyne $\lim_{x\to z} H1_{V_n\cap\partial U}(x) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tudíž $\lim_{x\to z} g_0(x) = \infty$. Nechť $k \in \mathcal{H}^+(U)$ má vlastnosti z (3.6.10). Potom má zřejmě funkce $k_0 = g_0 + k$ požadované vlastnosti. □

3.6.12. Věta. *Nechť funkce $u \in \mathcal{H}^*(U)$ je zdola omezená a nechť $\limsup_{x\to z} u(x) \geq 0$, kdykoli $z \in \partial_r U$. Potom $u \geq 0$. Speciálně: jestliže $h \in \mathcal{H}(U)$ je omezená a pro každý bod $z \in \partial_r U$ platí $\lim_{x\to z} h(x) = 0$, potom $h = 0$.*

Důkaz. Plyne z (3.3.8) a (3.6.9). □

3.6.13. Poznámka. Z (3.6.12) vyplývá, že pro $f \in C(\partial U)$ je Hf jediná omezená harmonická funkce, která nabývá „správné hraniční hodnoty“ v každém regulárním bodě. Přesněji: Je-li h omezená harmonická funkce na U a $\lim_{x \to z} h(x) = f(z)$ pro každý bod $z \in \partial_r U$, potom $h = Hf$.

3.7 Keldyšova věta

V tomto odstavci znamená U opět omezenou oblast v $\mathbb{R}^m$. Připomeňme, že podle (3.2.6) je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, Keldyšův operátor. Tím se rozumí, že je to lineární nezáporné zobrazení $A : \mathcal{C}(\partial U) \mapsto \mathcal{H}(U)$ takové, že Af je řešení klasické Dirichletovy úlohy v případě, že pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ takové řešení existuje.

Naším cílem je dokázat, že na U žádný jiný Keldyšův operátor neexistuje. Ve skutečnosti dokážeme dokonce jednoznačnost ve třídě obecnějších operátorů; viz (3.7.5).

Důkaz bude vyžadovat několik pomocných tvrzení. Dříve, než je uvedeme, bude pro výklad užitečné provést tuto motivační úvahu. Předpokládejme, že bychom pro daný regulární bod z množiny U uměli sestrojit funkci $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$ takovou, že $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$ (to by pak ovšem byla „velice kvalitní“ bariéra pro bod z; srv. se (3.4.1)). Pak by důkaz jednoznačnosti Keldyšova operátoru byl opravdu snadný. Skutečně, nechť A je Keldyšův operátor a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Dokazujeme rovnost $Af = Hf$. Zvolíme $z \in \partial_r U$ a uvažujeme „velice kvalitní“ bariéru h pro bod z. Nechť $\varepsilon > 0$ a V je okolí bodu z takové, že $|f - f(z)| \le \varepsilon$ na $\partial U \cap V$. Zřejmě existuje $c > 0$ takové, že $ch_{|\partial U \setminus V} \ge \sup |f|(\partial U \setminus V)$. Definujeme-li na ∂U funkci $g = f(z) + \varepsilon + ch|_{\partial U}$, platí na ∂U nerovnost $f \le g$ a pro funkci g existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy, totiž funkce $f(z) + \varepsilon + ch|_U$. Proto je $Af \le Ag = f(z) + \varepsilon + ch|_U$. Odtud dostáváme

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \le f(z) + \varepsilon + 0,$$

takže

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \le f(z).$$

Analogicky se odvodí nerovnost

$$f(z) \le \liminf_{x \to z} Af(x).$$

Vidíme, že Af je omezená harmonická funkce, pro niž $\lim_{x \to z} Af(x) = f(z)$, kdykoli $z \in \partial_r U$. Podle (3.6.13) dostáváme $Af = Hf$.

„Velmi kvalitní“ bariéra s uvedenými vlastnostmi existuje (viz. (3.7.8)), přímý důkaz existence je náročný. Ukážeme, že výše uvedenou úvahu lze modifikovat a spokojit se s „méně kvalitní“ funkcí h, která má v bodě $z \in \partial_r U$ pouze přibližně hodnotu 0 a je dostatečně velká v bodech množiny ∂U nepříliš vzdálených od bodu z.

3.7.1. Lemma. *Nechť V a W jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^m$, $W \subset V$, $v \in \mathcal{H}^*(V)$, $w \in \mathcal{H}^*(W)$ a nechť $\liminf_{x \to z} w(x) \ge v(z)$, kdykoli $z \in \partial W \cap V$. Definujme*

$$u = \begin{cases} \min(w, v) & \text{na } W, \\ v & \text{na } V \setminus W. \end{cases}$$

Potom je $u \in \mathcal{H}^*(V)$.

Důkaz. Je-li $z \in V \setminus \partial W$, je zřejmě funkce u zdola polospojitá v bodě z a pro $r > 0$ takové, že $\overline{B_r(z)} \subset V \setminus \partial W$, platí $\int u \, d\lambda_{z,r} \le u(z)$.

Nechť $z \in \partial W \cap V$. Potom

$$\liminf_{x \to z,\, x \in W} u(x) = \min\Big(\liminf_{x \to z,\, x \in W} w(x), \liminf_{x \to z,\, x \in W} v(x)\Big) \ge v(z) = u(z),$$
$$\liminf_{x \to z,\, x \in V \setminus W} u(x) = \liminf_{x \to z,\, x \in V \setminus W} v(x) \ge v(z) = u(z).$$

Tudíž funkce u je zdola polospojitá v bodě z. Je-li $r > 0$ takové, že $\overline{B_r(z)} \subset V$, zřejmě platí

$$\int u \, d\lambda_{z,r} \le \int v \, d\lambda_{z,r} \le v(z) = u(z).$$

Z (2.2.5) vyplývá, že $u \in \mathcal{H}^*(V)$. □

3.7.2. Lemma. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina obsahující $\overline{U}$, $v \in \mathcal{S}(V)$. Potom je funkce $v|_{\partial U}$ resolutivní a*

$$H(v|_{\partial U}) = \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \ge v \text{ na } V \setminus U\}.$$

Důkaz. Označme $f = v|_{\partial U}$. Podle (3.3.4) a (2.3.2) je funkce f resolutivní, neboť je zdola polospojitá a $\inf f(\partial U) \le Hf \le v|_U$. Nechť $w \in \mathcal{U}(f)$. Podle (3.7.1) je funkce

$$u = \begin{cases} \min(w, v) & \text{na } U\,, \\ v & \text{na } V \setminus U\,, \end{cases}$$

hyperharmonická, tudíž na U jsou splněny nerovnosti

$$\inf\{s;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \ge v \text{ na } V \setminus U\} \le u \le w.$$

Odtud dostaneme nerovnost

$$\inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \ge v \text{ na } V \setminus U\} \le Hf.$$

Je-li $s \in \mathcal{H}^*(V)$, $s \ge v$ na $U \setminus V$, potom pro každý bod $z \in \partial U$ platí

$$\liminf_{x \to z,\, x \in U} s(x) \ge \liminf_{x \to z} s(x) = s(z) \ge v(z) = f(z) > -\infty.$$

Vidíme, že $s|_U \in \mathcal{U}(f)$, tudíž $s|_U \ge Hf$. Nyní je zřejmé, že platí nerovnost

$$Hf \le \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \ge v \text{ na } V \setminus U\}.$$

□

3.7.3. Lemma. *Nechť V a W jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^m$, V je omezená a*

$$\overline{U} \subset W \subset \overline{W} \subset V\,.$$

Nechť v je spojitá superharmonická funkce na V a nechť $v|_{V \setminus \overline{W}} \in \mathcal{H}(V \setminus \overline{W})$. Potom existuje neklesající posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých superharmonických funkcí na V taková, že $u_n \le v$, $(u_n)|_U \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, a pro každé $z \in (V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ platí $\lim_{n \to \infty} u_n(z) = v(z)$.

Důkaz. Položme $u = \inf\{s;\ s \in \mathcal{H}^*(V),\ s \geq v \text{ na } V \setminus U\}$. Nechť $z \in \partial_r U$ a $\varepsilon > 0$. Protože $u = v$ na $V \setminus U$, je $u|_{V\setminus U}$ spojitá funkce a podle (3.7.2) platí na U rovnost $u = H(u|_{\partial U})$. Jelikož $z \in \partial_r U$, vyplývá odtud existence $r > 0$ takového, že $B_r(z) \subset V$ a $u > u(z) - \varepsilon$ na $B_r(z)$. Proto $\widehat{u}(z) = \liminf_{x\to z} u(x) \geq u(z) - \varepsilon$. Dokázali jsme, že $u = \widehat{u}$ na $(V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$. Podle (2.2.8) platí $\widehat{u} \in \mathcal{S}(V)$. Získali jsme tak funkci $\widehat{u} \in \mathcal{S}(V)$ takovou, že $\widehat{u}|_U \in \mathcal{H}(U)$, $\widehat{u} = v$ na $(V \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ a $\widehat{u}|_{V\setminus\overline{W}} \in \mathcal{H}(V \setminus \overline{W})$. Z (2.6.6) a (2.6.2) snadno plyne, že existují Radonova míra μ s kompaktním nosičem obsaženým v množině V a funkce $h \in \mathcal{H}(V)$ tak, že $\widehat{u} = N\mu + h$ na V. Zřejmě $\operatorname{spt}(\mu) \subset V \setminus U$, neboť $(N\mu)|_U \in \mathcal{H}(U)$. Podle (2.8.3) existují Radonovy míry μ_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\operatorname{spt}(\mu_n) \subset \operatorname{spt}(\mu)$, potenciály $N\mu_n$ jsou spojité a $N\mu = \sum_{n=1}^{\infty} N\mu_n$.Protože $(N\mu)|_U \in \mathcal{H}(U)$, je $(N\mu_r)|_U \in \mathcal{H}(U)$ pro každé $r \in \mathbb{N}$. Superharmonická funkce $N\mu_r$ je totiž na U zároveň subharmonická, neboť $N\mu_r = N\mu - \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{r\}} N\mu_n$. Položíme-li $u_n = \sum_{k=1}^{n} (N\mu_n)|_V + h$, $n \in \mathbb{N}$, dostáváme funkce s požadovanými vlastnostmi. □

3.7.4. Věta. *Nechť $z \in \partial_r U$, $0 < a < 1$, $b > 1$ a $K \subset \partial U \setminus \{z\}$ je kompaktní množina. Potom existuje nezáporná funkce $g \in \mathcal{C}(\overline{U})$ taková, že $g|_U \in \mathcal{H}(U)$, $g(z) = 1$, $g \leq b$ na $\overline{U}$ a $g \leq a$ na K.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $z = 0$. Zvolme čísla $0 < r < \varrho < R$ tak, aby $\overline{U} \subset B_\varrho(0)$ a $K \cap B_r(0) = \emptyset$. Připomeňme definici funkce p uvedenou za (1.9.1): $p(0) = \infty$ a pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} \log \dfrac{1}{t} & \text{v případě } m = 2\,, \\ \dfrac{1}{\omega(m-2)} \dfrac{1}{t^{m-2}} & \text{v případě } m > 2\,. \end{cases}$$

Pro $x \in B_R(0)$ položme

$$v(x) = \min\left(a(p(|x|) - p(R))/(p(r) - p(R)),\ b\right).$$

Potom je v kladná spojitá superharmonická funkce, která je harmonická na $B_R(0) \setminus B_r(0)$, $v \leq a$ na $B_R(0) \setminus B_r(0)$ a $v(0) = b$. Podle (3.7.3) existuje neklesající posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých superharmonických funkcí na $B_R(0)$ taková, že $u_n \leq v$, $(u_n)|_U \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, a pro každé $y \in (B_R(0) \setminus \overline{U}) \cup \partial_r U$ platí $\lim_{n\to\infty} u_n(y) = v(y)$. Z Diniho věty vyplývá, že speciálně konvergují funkce u_n k funkci v stejnoměrně na množině $S_\varrho(0) \cup \{0\}$. Existuje tudíž $n \in \mathbb{N}$ tak, že $u_n \geq 0$ na $S_\varrho(0)$ a $u_n(0) \geq 1$. Podle (2.2.4) je $u_n \geq 0$ na $B_\varrho(0)$. Definujme $g = (1/u_n(0))(u_n)|_{\overline{U}}$. Potom $g \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $g|_U \in \mathcal{H}(U)$, $g \leq b$ na $\overline{U}$, $g \leq a$ na $\overline{U} \setminus B_r(0)$, což je množina obsahující K, a $g(0) = 1$. □

Zavedeme ještě pojem modifikující definici Keldyšova operátoru (nepožaduje se linearita). Budeme říkat, že zobrazení $B : \mathcal{C}(\partial U) \mapsto \mathcal{H}(U)$ je *K-operátor na U*, jestliže

(i) B je neklesající (tj. $Bf \leq Bg$, kdykoli $f, g \in \mathcal{C}(\partial U)$, $f \leq g$) a

(ii) jestliže pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ existuje řešení h_f klasické Dirichletovy úlohy, potom $Bf = h_f$.

Je zřejmé, že pro každé $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ je Bf omezená harmonická funkce a každý Keldyšův operátor je K-operátor.

3.7.5. Věta. *Na U existuje právě jeden K-operátor.*

Důkaz. Nechť B je K-operátor na U. Dokážeme, že $Bf = Hf$, kdykoli $f \in \mathcal{C}(\partial U)$.

Nechť tedy $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, $z \in \partial_r U$, $\varepsilon > 0$ a $c > \sup |f - f(z)|(\partial U)$. Položme $a = \varepsilon/c$, $b = 1+\varepsilon/c$, dále zvolme $r > 0$ tak, aby $|f - f(z)| < \varepsilon$ na $B_r(z)$ a označme $M = \partial U \setminus B_r(z)$. Nechť g je funkce s vlastnostmi z (3.7.4). Definujme $h = c((1+\varepsilon/c) - g)$. Potom $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h \geq 0$, $h(z) = \varepsilon$ a na M platí $h \geq c > f - f(z)$. Protože $f \leq f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U}$, platí podle vlastnosti (i) K-operátoru nerovnost $Bf \leq B(f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U})$ na U. Podle vlastnosti (ii) je ovšem $B(f(z) + \varepsilon + h|_{\partial U}) = f(z) + \varepsilon + h_{|U}$. Odtud

$$\limsup_{x \to z} Bf(x) \leq f(z) + \varepsilon + \lim_{x \to z} h(x) = f(z) + 2\varepsilon.$$

Podobně se odvodí nerovnost

$$f(z) - 2\varepsilon \leq \liminf_{x \to z} Bf(x).$$

Proto pro každé $z \in \partial_r U$ platí $\lim_{x \to z} Bf(x) = f(z)$. Podle (3.6.13) je $Bf = Hf$. $\square$

Následující věta ukazuje, že řešení zobecněné Dirichletovy úlohy lze získat pomocí modifikovaných systémů horních funkcí. (Samozřejmě také modifikovaných systémů dolních funkcí.) Připomeňme ještě, že $\mathcal{R}(U) = \{h - k;\ h, k \in \mathcal{H}^+(U)\}$ je podle (2.4.6) dedekindovsky úplný vektorový svaz. Pro zdola omezenou neprázdnou množinu $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(U)$ značíme $\bigwedge \mathcal{F}$ infimum $\mathcal{F}$ v tomto svazu. Je zřejmé, že každá omezená harmonická funkce na U je prvkem $\mathcal{R}(U)$.

Pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ definujme

$$\begin{aligned} Pf &= \inf\{s|_U;\ s \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ s|_U \in \mathcal{S}(U),\ s|_{\partial U} \geq f\}, \\ Lf &= \bigwedge\{h|_U;\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\}. \end{aligned}$$

3.7.6. Věta. *Pro každé $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ platí $Pf = Lf$.*

Důkaz. Zřejmě jsou zobrazení P a L neklesající. Nechť $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Zřejmě $Lf \in \mathcal{H}(U)$, z (2.4.3) plyne, že $Pf \in \mathcal{H}(U)$. Pomocí (2.2.4) se nyní snadno nahlédne, že P a L jsou K-operátory. Tvrzení plyne z (3.7.5). $\square$

3.7.7. Poznámka. Pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ definujme

$$Gf = \inf\left\{h;\ h \in \mathcal{H}(U),\ \liminf_{x \to z} h(x) \geq f(z) \text{ pro všechna } z \in \partial U\right\}.$$

Potom je G zřejmě neklesající zobrazení na $\mathcal{C}(\partial U)$, ovšem není zřejmé, že $Gf \in \mathcal{H}(U)$. Tudíž (3.7.5) nelze přímo aplikovat. V (3.8.9) dokážeme (dokonce pro všechny resolutivní funkce), že platí $Gf = Hf$.

S ohledem na definici operátoru L poznamenejme, že obecně neplatí pro $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ rovnost

$$Hf = \inf\{h|_U;\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\}.$$

Volme $U = B_1(0) \setminus \{0\}$, $f = 0$ na $S_1(0)$ a $f(0) = 1$. Nechť $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $h|_U \in \mathcal{H}(U)$ a $h|_{\partial U} \geq f$. Podle (2.6.8) je $h|_{B_1(0)} \in \mathcal{H}(B_1(0))$ a z (1.7.2) snadno plyne, že pro každé $x \in U$ je

$$\inf\{h(x);\ h \in \mathcal{C}(\overline{U}),\ h|_U \in \mathcal{H}(U),\ h|_{\partial U} \geq f\} > 0.$$

Ovšem $Hf = 0$ na U.

3.7.8. Věta. *Nechť X je kompaktní Hausdorffův topologický prostor, $z \in X$ a nechť $\{z\}$ je množina typu G_δ. Nechť $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor prostoru spojitých funkcí na X obsahující konstanty a mající tuto vlastnost: existuje $a \in (0,1)$, takové, že pro každé $b > 1$ a pro každou kompaktní množinu $K \subset X \setminus \{z\}$ existuje $f \in \mathcal{F}$, $0 \le f \le b$, $f(z) = 1$ a $f|_K \le a$. Potom existuje funkce $g \in \mathcal{F}$ taková, že $g(z) = 0$ a $g > 0$ na $X \setminus \{z\}$.*

Důkaz. Nechť $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ je nerostoucí posloupnost otevřených množin v X taková, že $G_0 = X$ a $\bigcap_{k=0}^\infty G_k = \{z\}$. Zvolme libovolně posloupnost kladných reálných čísel $a_1, a_2, \dots$, splňující podmínku $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$, a označme $s_n = \sum_{k=n+1}^\infty a_k$. Položme $W_{-1} = X$ a zvolme $c > 1$.

Indukcí budeme definovat množiny $W_0, W_1, \dots$, čísla $b_1, b_2, \dots$ a funkce $f_1, f_2, \dots$ tak, aby pro každé $j \in \mathbb{N}$ platilo

(1) W_{j-1} je otevřená množina, $W_{j-2} \supset W_{j-1}$, $z \in W_{j-1} \subset G_{j-1}$;

(2) $f_j \in \mathcal{F}$, $0 \le f_j \le b_j \le c$ a $f_j(z) = 1$;

(3) pro každé $x \notin W_{j-1}$ je $f_j(x) \le a$;

(4) pro každé $x \in W_{j-1}$ je $\sum_{k=1}^j a_k f_k(x) < 1 - s_j a$.

Definujme $W_0 = X$. Zvolme $b_1 \in (1, c]$ tak, aby $a_1 b_1 + s_1 a < 1$. Podle předpokladu existuje funkce $f_1 \in \mathcal{F}$ taková, že $0 \le f_1 \le b_1$ a $f_1(z) = 1$. Potom pro $j = 1$ platí (1), (2), (3) a (4).

Předpokládejme, že $n > 1$ a že jsou již definovány množiny W_{j-1}, čísla b_j a funkce f_j splňující pro $j = 1, \dots, n$ podmínky (1) – (4). Zvolme $b_{n+1} \in (1, c]$ tak, aby platilo $\sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} b_{n+1} + s_{n+1} a < 1$. Definujme

$$W_n = G_n \cap W_{n-1} \cap \Big\{x \in X; \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) + a_{n+1} b_{n+1} < 1 - s_{n+1} a\Big\}.$$

Potom zřejmě pro $j = n + 1$ platí podmínka (1). Podle předpokladu existuje funkce $f_{n+1} \in \mathcal{F}$ taková, že $0 \le f_{n+1} \le b_{n+1}$, $f_{n+1}(z) = 1$ a $f_{n+1}|_{X \setminus W_n} \le a$. Potom pro $j = n + 1$ zřejmě platí i (2), (3) a (4).

Definujme $h = \sum_{n=1}^\infty a_n f_n$. Protože $0 \le f_n \le c$, $n \in \mathbb{N}$, řada konverguje stejnoměrně na X. Jelikož $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor, je $h \in \mathcal{F}$. Zřejmě $h \ge 0$ a $h(z) = 1$. Protože $\bigcap_{k=1}^\infty G_k = \{z\}$, podle (1) platí $\{z\} = \bigcap_{k=0}^\infty W_k$. Uvažujeme $x \in X \setminus \{z\}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in W_{n-1} \setminus W_n$. Podle (3) a (4) dostáváme

$$h(x) \le \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) + \sum_{k=n+1}^\infty a_k f_k(x) < 1 - s_n a + \sum_{k=n+1}^\infty a_k a = 1.$$

Funkce $g = 1 - h$ má zřejmě požadované vlastnosti. □

3.7.9. Věta. *Nechť $z \in \partial_r U$. Potom existuje funkce $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$ taková, že $h|_U \in \mathcal{H}(U)$, $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$.*

Důkaz. Užijeme (3.7.8) pro $X = \partial U$ a $\mathcal{F} = \{u|_{\partial U};\, u \in \mathcal{C}(\overline{U}),\, u|_U \in \mathcal{H}(U)\}$. Z (1.8.1) plyne, že $\mathcal{F}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(\partial U)$. Tvrzení vyplývá z (3.7.4). (Nerovnost $h > 0$ na U je důsledkem (1.5.3).) □

3.8 Corneův přístup k Dirichletově úloze

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast, $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h a k jsou reálné funkce a $k \geq 0$.

Budeme říkat, že *funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k*, jestliže je splněna tato podmínka:

Pro každou množinu $M \subset U$ a každý bod $z \in \overline{M} \cap \partial U$ platí

(∗) Je-li $\limsup_{x \to z, x \in M} k(x) < \infty$, potom $f(z) \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \to z, x \in M} h(x) = f(z)$.

(∗∗) Je-li $\lim_{x \to z, x \in M} k(x) = \infty$, potom $\lim_{x \to z, x \in M} h(x)/(1 + k(x)) = 0$.

3.8.1. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h a k jsou reálné funkce, $k \geq 0$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) *Funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k.*

(ii) *Pro každý bod $z \in \partial U$ platí*

(ii∗) *Je-li* $\liminf_{x \to z} k(x) < \infty$, *potom* $f(z) \in \mathbb{R}$ *a*

$$\lim_{x \to z} \frac{h(x) - f(z)}{1 + k(x)} = 0.$$

(ii∗∗) *Je-li* $\lim_{x \to z} k(x) = \infty$, *potom* $\lim_{x \to z} h(x)/(1 + k(x)) = 0$.

(iii) *Pro každý bod $z \in \partial U$ a každé $\varepsilon > 0$ jsou splněny nerovnosti:*

$$\infty \neq \limsup_{x \to z} (h(x) - \varepsilon k(x)) \leq f(z) \leq \liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty\,.$$

Důkaz. Nechť platí podmínka (i). Potom (ii∗∗) je podmínka (∗∗) pro případ $M = U$. Nechť $z \in \partial U$ a nechť $\liminf_{x \to z} k(x) < \infty$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že z leží v uzávěru množiny $k^{-1}((-\infty, n\rangle)$. Podle (∗) je $f(z) \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\delta > 0$ a označme

$$M = \{x \in U;\ |(h(x) - f(z))/(1 + k(x))| > \delta\}.$$

Dokážeme sporem, že $z \notin \overline{M}$. Předpokládejme, že $z \in \overline{M}$ a nechť $c = \liminf_{x \to z, x \in M} k(x)$. Jestliže $c = \infty$, pak z (∗∗) dostáváme

$$\lim_{x \to z, x \in M} (h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0\,;$$

to ovšem podle definice množiny M není možné. Jestliže $c < \infty$, pak z leží v uzávěru množiny $N = M \cap k^{-1}((-\infty, c + 1\rangle)$. Podle (∗) je však $\lim_{x \to z, x \in N} h(x) = f(z)$, tudíž $\lim_{x \to z, x \in N} (h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0$, což je opět v rozporu s definicí množiny M. Vidíme, že platí podmínka (ii∗) a tím je (ii) dokázáno.

Nechť platí podmínka (ii), nechť $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$. Označme $c = \liminf_{x \to z} k(x)$. Je-li $c = \infty$, pak podle (ii∗∗) dostáváme

$$\liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) = \liminf_{x \to z}\, (1 + k(x)) \cdot \left(\frac{h(x)}{1 + k(x)} + \frac{\varepsilon k(x)}{1 + k(x)} \right) = \infty \geq f(z).$$

Předpokládejme, že $c < \infty$. Z (ii∗) vyplývá, že $f(z) \in \mathbb{R}$ a pro každé $a > 0$ existuje okolí $V(a)$ bodu z takové, že

$$|h - f(z)|/(1 + k) \leq a \text{ na } U \cap V(a)\,.$$

Speciálně na $U \cap V(a)$ platí $h + ak \geq f(z) - a$. Pro $a > 0$ definujme

$$I(a) = \liminf_{x \to z} (h(x) + ak(x)) \,.$$

Zřejmě je funkce I neklesající na $(0, \infty)$ a $I(a) \geq f(z) - a$ pro každé $a > 0$. Z toho vyplývá, že

$$\liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) = I(\varepsilon) \geq \lim_{a \to 0+} I(a) \geq \lim_{a \to 0+} (f(z) - a) = f(z) \neq \infty \,.$$

Nerovnost pro limes superior se dokáže analogicky a tím je platnost podmínky (iii) ověřena.

Nechť konečně platí podmínka (iii), nechť $M \subset U$ a $z \in \overline{M} \cap \partial U$. Označme dále $b = \liminf_{x \to z, x \in M} h(x)$ a $d = \limsup_{x \to z, x \in M} k(x)$. Jestliže $d < \infty$, pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \liminf_{x \to z} (h(x) + \varepsilon k(x)) \leq \liminf_{x \to z,\, x \in M} (h(x) + \varepsilon k(x)) \leq \\ &\leq \liminf_{x \to z,\, x \in M} h(x) + \varepsilon \limsup_{x \to z,\, x \in M} k(x) = b + \varepsilon d. \end{aligned}$$

Podle podmínky (iii) je $b + \varepsilon d \neq -\infty$, tedy $b \neq -\infty$. Dostáváme tak

$$f(z) \leq b = \liminf_{x \to z,\, x \in M} h(x) \neq -\infty \,.$$

Podobně se ukáže, že $f(z) \geq \limsup_{x \to z, x \in M} h(x) \neq \infty$. Odtud $\lim_{x \to z, x \in M} h(x) = f(z) \in \mathbb{R}$, což je podmínka $(*)$.

Zbývá dokázat podmínku $(**)$. Předpokládejme, že $\lim_{x \to z, x \in M} k(x) = \infty$ a $\varepsilon > 0$. Z podmínky (iii) plyne

$$\limsup_{x \to z,\, x \in M} (h(x) - \varepsilon k(x)) \neq \infty \quad \text{a} \quad \liminf_{x \to z,\, x \in M} (h(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty.$$

Tudíž existuje kladné reálné číslo a a okolí V bodu z taková, že na množině $M \cap V$ jsou splněny nerovnosti

$$h - \varepsilon k \leq a, \quad h + \varepsilon k \geq -a.$$

Odtud dostáváme na $M \cap V$ nerovnost $|h|/(1 + k) \leq (a + \varepsilon k)/(1 + k)$. Protože platí $\lim_{x \to z, x \in M} k(x) = \infty$, je pro každé $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{x \to z,\, x \in M} |h(x)|/(1 + k(x)) \leq \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že je splněna podmínka $(**)$ a tím je platnost podmínky (i) ověřena. □

3.8.2. Lemma. *Nechť $f_j : \partial U \to \mathbb{R}^*$, h_j a k_j jsou reálné funkce na U, $k_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Nechť h_j konverguje k f_j s kontrolou k_j, $j = 1, 2$. Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je funkce, pro niž $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, pokud je pro $z \in \partial U$ součet $f_1(z) + f_2(z)$ definován. Potom $h_1 + h_2$ konverguje k f s kontrolou $k_1 + k_2$. Dále pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkce $a \cdot h_1$ konverguje k funkci $a \cdot f_1$ s kontrolou $|a| \cdot k_1$.*

Důkaz. Nechť $z \in \partial U$, $\varepsilon > 0$ a nechť součet $f_1(z) + f_2(z)$ je definován. Podle (3.8.1(iii)) je pro $j = 1, 2$

$$\infty \neq \limsup_{x \to z} (h_j(x) - \varepsilon k_j(x)) \leq f_j(z) \leq \liminf_{x \to z} (h_j(x) + \varepsilon k_j(x)) \neq -\infty.$$

Označme $h = h_1 + h_2$, $k = k_1 + k_2$. Potom

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) &\le \limsup_{x\to z}(h_1(x) - \varepsilon k_1(x)) + \limsup_{x\to z}(h_2(x) - \varepsilon k_2(x)) \le \\
&\le f_1(z) + f_2(z) \le \\
&\le \liminf_{x\to z}(h_1(x) + \varepsilon k_1(x)) + \liminf_{x\to z}(h_2(x) + \varepsilon k_2(x)) \le \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x))
\end{aligned}$$

a zřejmě číslo na levé straně řetězce nerovností je různo od ∞ a číslo na pravé straně je různo od $-\infty$.

Nechť $f_1(z) = -\infty$ a $f_2(z) = \infty$. Potom

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \le -\infty + \limsup_{x\to z}(h_2(x) - \varepsilon k_2(x)) = -\infty, \\
&\liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \ge \liminf_{x\to z}(h_1(x) + \varepsilon k_1(x)) + \infty = \infty.
\end{aligned}$$

Analogicky v případě $f_1(z) = \infty$ a $f_2(z) = -\infty$ platí

$$\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) = -\infty, \quad \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) = \infty\,.$$

Vidíme, že pro každé $z \in \partial U$ a každé $\varepsilon > 0$ je

$$\infty \ne \limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon k(x)) \le f(z) \le \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon k(x)) \ne -\infty$$

a tedy podle (3.8.1(iii)) funkce $h_1 + h_2$ konverguje k funkci f s kontrolou $k_1 + k_2$.

Tvrzení o násobku plyne z (3.8.1(iii)) ihned pro $a > 0$ a také pro $a = -1$, tedy pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že *funkce f je resolutivní v Corneově smyslu* (krátce: *C-resolutivní*), jestliže existují funkce $h \in \mathcal{H}(U)$ a funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ takové, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k.

Každou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$, pro niž existuje $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k, nazveme *řešení Dirichletovy úlohy v Corneově smyslu* (krátce: *C-řešením*) příslušným funkci f.

3.8.3. Věta. *Nechť f je C-resolutivní funkce a nechť h je C-řešení příslušné funkci f. Potom f je resolutivní a $h = Hf$.*

Důkaz. Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$, $k \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť funkce h konverguje k funkci f s kontrolou k. Podle (3.8.1(iii)) je pro každé $\varepsilon > 0$ funkce $h - \varepsilon k$ dolní funkce k funkci f a $h + \varepsilon k$ horní funkce k funkci f. Proto platí $h - \varepsilon k \le \underline{H}f \le \overline{H}f \le h + \varepsilon k$. Odtud plyne, že funkce f je resolutivní a $Hf = h$. $\square$

3.8.4. Lemma. *Nechť f je spojitá funkce na ∂U. Potom f je C-resolutivní.*

Důkaz. Nechť $k \in \mathcal{H}^+(U)$ je funkce, pro niž $\lim_{x\to z} k(x) = \infty$ pro každé $z \in \partial_{irr} U$. (Taková funkce existuje podle (3.6.10).) Položme $h = Hf$. Pak funkce h je omezená a tudíž zřejmě $\lim_{x\to z} h(x)/(1 + k(x)) = 0$, kdykoli $z \in \partial U$ a $\lim_{x\to z} k(x) = \infty$. Je-li $z \in \partial U$ a $\liminf_{x\to z} k(x) < \infty$, potom $z \in \partial_r U$, tudíž platí $\lim_{x\to z} h(x) = f(z)$ a také $\lim_{x\to z}(h(x) - f(z))/(1 + k(x)) = 0$. Podle (3.8.1(ii)) je f C-resolutivní. $\square$

3.8.5. Lemma. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost reálných C-resolutivních funkcí, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a nechť $\lim_{n\to\infty} Hf_n \in \mathcal{H}(U)$. Potom f je C-resolutivní.*

Důkaz. Zvolme $y \in U$ a označme $h_n = Hf_n$, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Nechť $k_n \in \mathcal{H}^+(U)$ a nechť funkce h_n konverguje k f_n s kontrolou k_n. Zvolme čísla $a_n > 0$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n(y) < \infty$ a položme $k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n$. Podle (1.8.3) platí $k \in \mathcal{H}^+(U)$ a z (3.8.1(iii)) ihned vyplývá, že pro každé n konverguje funkce h_n k funkci f_n s kontrolou k.

Existuje posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(g_{n+1}(y) - g_n(y)) < \infty\,.$$

Definujme $g = \sum_{n=1}^{\infty} n(g_{n+1} - g_n)$, $g_0 = 0$ na U a všimněme si, že $g \in \mathcal{H}^+(U)$ podle (1.8.3) a

$$h = \lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{n=0}^{\infty}(g_{n+1} - g_n)\,.$$

Dokážeme, že funkce h konverguje k funkci f s kontrolou $k + g$.

Nechť $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n(z) \leq \liminf_{x\to z}(h_n(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty$$

a zřejmě $h_n + \varepsilon k \leq h + \varepsilon k \leq h + \varepsilon(k + g)$, platí

$$f_n(z) \leq \liminf_{x\to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + g(x)) \neq -\infty$$

a tudíž

$$f(z) \leq \liminf_{x\to z}\,(h(x) + \varepsilon(k(x) + g(x))) \neq -\infty.$$

Nechť $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ splňuje nerovnost $1 \leq \varepsilon r$. Potom

$$h - \varepsilon(k+g) = \sum_{n=0}^{r-1}(g_{n+1} - g_n) - \varepsilon k + \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) - \varepsilon\sum_{n=1}^{r-1} n(g_{n+1} - g_n) - \sum_{n=r}^{\infty} \varepsilon n(g_{n+1} - g_n) \leq$$
$$\leq g_r - \varepsilon k + \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) + 0 - \sum_{n=r}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) = g_r - \varepsilon k$$

Proto platí

$$\limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon(k(x) + g(x)) \leq \limsup_{x\to z}(g_r(x) - \varepsilon k\ (x))\,.$$

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ platí $h_n = g_r$. Protože funkce h_n konverguje k f_n s kontrolou k, je

$$\infty \neq \liminf_{x\to z}(g_r(x) - \varepsilon k(x)) \leq f_n(z) \leq f(z)\,.$$

Odtud

$$\infty \neq \limsup_{x\to z}(h(x) - \varepsilon(k(x) + g(x)) \leq f(z).$$

Z (3.8.1(iii)) vyplývá, že h konverguje k f s kontrolou $k+g$, tudíž je funkce f C-resolutivní.

□

3.8.6. Lemma. *Nechť Φ je systém všech množin omezených funkcí na ∂U takový, že pro každé $\mathcal{F} \in \Phi$ platí tyto podmínky:*

(1) $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}$;

(2) *je-li $f\colon \partial U \to \mathbb{R}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$, pak je též $f \in \mathcal{F}$.*

Potom je $\bigcap \Phi$ množina všech omezených borelovských funkcí na ∂U.

Důkaz. Označíme-li $\mathcal{F} = \bigcap \Phi$, platí zřejmě (1) a (2). Dokážeme tuto implikaci:

(3) je-li $f : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, pak $f \in \mathcal{F}$.

Je známo, že množina $\mathcal{B}$ omezených borelovských funkcí na ∂U splývá s nejmenší množinou $\mathcal{F}_0$ omezených funkcí na ∂U takovou, že $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}_0$ a platí (3), píšeme-li $\mathcal{F}_0$ místo $\mathcal{F}$. Protože $\mathcal{B} \in \Phi$, je $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Z (1) a (3) ovšem plyne $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ a tedy tvrzení lemmatu.

Pro důkaz (3) si nejprve rozmyslíme, že $\max(f,g) \in \mathcal{F}$, kdykoli $f, g \in \mathcal{F}$.

Pro $f \in \mathcal{F}$ definujme $\mathcal{F}(f) = \{h \in \mathcal{F};\, \max(f,h) \in \mathcal{F}\}$. Nechť nejprve $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Zřejmě platí $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}(f)$. Je-li $g : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}(f)$ a $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, pak $\{\max(f,g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $\max(f,g) = \lim_{n\to\infty} \max(f,g_n)$. Vidíme, že $\max(f,g) \in \mathcal{F}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{F}(f) \in \Phi$, a proto $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}$.

Nechť nyní $f \in \mathcal{F}$. Z předchozího víme, že $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{F}(f)$. Nechť $g : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}(f)$ a $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Pak $\{\max(f,g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $\max(f,g) = \lim_{n\to\infty} \max(f,g_n)$. Proto $\max(f,g) \in \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}$. Odtud snadno plyne, že maximum konečné množiny funkcí z $\mathcal{F}$ leží v $\mathcal{F}$.

Dokážeme, že platí (3). Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pro $j, k \in \mathbb{N}$ definujme $g_{j,k} = \max\{f_j, \dots, f_{j+k}\}$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ je pak $\{g_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ omezená neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$. Položme $g_j = \lim_{k\to\infty} g_{j,k}$ Zřejmě je g_j omezená funkce a $g_j \in \mathcal{F}$ podle (2). Protože $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ je omezená nerostoucí posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{j\to\infty} g_j$, je $f \in \mathcal{F}$ opět podle (2). ☐

3.8.7. Lemma. *Nechť borelovská množina $N \subset \partial U$ má harmonickou míru nula a nechť pro funkci $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ platí $f = 0$ na $\partial U \setminus N$. Potom funkce f je C-resolutivní.*

Důkaz. Podle (3.6.11) existuje funkce $k_0 \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že $\lim_{x\to z} k_0(x) = \infty$, kdykoli $z \in N$. Potom funkce $h = 0$ na U konverguje k funkci f s kontrolou k_0. Pro každé $z \in \partial U$ a $\varepsilon > 0$ totiž zřejmě platí

$$\infty \neq \limsup_{x\to z}(-\varepsilon k_0(x)) \leq f(z) \leq \liminf_{x\to z}(\varepsilon k_0(x)) \neq -\infty.$$

☐

3.8.8. Věta. *Každá resolutivní funkce je C-resolutivní.*

Důkaz. Podle (3.8.4), (3.8.5), (3.8.2) a (3.8.6) je každá omezená borelovská funkce C-resolutivní. Z (3.3.4) vyplývá, že omezená resolutivní funkce je součtem omezené borelovské funkce na ∂U a funkce, která je různá od nuly pouze na borelovské množině míry nula. Nyní z (3.8.7) a (3.8.2) vidíme, že každá omezená resolutivní funkce je C-resolutivní. Je-li

$f \geq 0$ resolutivní funkce, jsou podle (3.3.4) také funkce $f_n = \min(f, n)$, $n \in \mathbb{N}$, resolutivní. Z (3.8.5) plyne, že f je C-resolutivní. Je-li konečně f resolutivní funkce, pak podle (3.3.4) jsou f^+ a f^- resolutivní funkce, tudíž C-resolutivní, a proto podle (3.8.2) je funkce f také C-resolutivní. □

Následující věta ukazuje, že v definici PWB-řešení Dirichletovy úlohy lze za horní a dolní funkce uvažovat pouze harmonické funkce.

3.8.9. Věta. *Nechť $f : \partial U \to \mathbb{R}^*$ je resolutivní funkce. Potom*

$$Hf = \sup(\mathcal{L}(f) \cap \mathcal{H}(U)) = \inf(\mathcal{U}(f) \cap \mathcal{H}(U)).$$

Důkaz. Okamžitě vyplývá z (3.8.8) a (3.8.1(iii)). □

3.8.10. Věta. *Nechť f je resolutivní funkce a $k_n \in \mathcal{U}(f) \cap \mathcal{H}(U)$, $q_n \in \mathcal{L}(f) \cap \mathcal{H}(U)$ jsou takové funkce, že $k = \sum_{n=1}^{\infty}(k_n - Hf)$ a $q = \sum_{n=1}^{\infty}(Hf - q_n)$ jsou funkce konečné alespoň v jednom bodě z U. Potom funkce Hf konverguje k f s kontrolou $k + q$.*

Důkaz. Podle (1.8.3) je funkce $k + q$ harmonická a zřejmě $k + q \geq 0$. Položme $h = Hf$. Nechť $z \in \partial U$, $\varepsilon > 0$ a nechť $r \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\varepsilon r \geq 1$. Potom

$$h + \varepsilon(k + q) \geq h + \varepsilon k \geq h + (1/r)\sum_{n=1}^{r}(k_n - h) = (1/r)\sum_{n=1}^{r} k_n.$$

Odtud dostáváme

$$\liminf_{x \to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + q(x))) \geq (1/r) \cdot \liminf_{x \to z} \sum_{n=1}^{r} k_n(x) \geq (1/r) \sum_{n=1}^{r} \liminf_{x \to z} k_n(x)\,.$$

Protože $k_n \in \mathcal{U}(f)$, není poslední součet roven $-\infty$, a

$$\liminf_{x \to z} k_n(x) \geq f(z)\,, \quad n \in \{1, \dots, r\}\,.$$

Vidíme, že

$$f(z) \leq \liminf_{x \to z}(h(x) + \varepsilon(k(x) + q(x))) \neq -\infty.$$

Důkaz pro limes superior je obdobný a tvrzení plyne z (3.8.1(iii)). □

3.8.11. Věta. *Nechť f je resolutivní funkce. Potom pro všechna $z \in \partial U$ s výjimkou množiny harmonické míry nula platí nerovnosti*

$$\liminf_{x \to z} Hf(x) \leq f(z) \leq \limsup_{x \to z} Hf(x).$$

Důkaz. Podle (3.8.8) existuje funkce $k \in \mathcal{H}^+(U)$ taková, že $Hf + \varepsilon k \in \mathcal{U}(f)$, kdykoli $\varepsilon > 0$. Definujme $N = \{z \in \partial U; \liminf_{x \to z} k(x) = \infty\}$. Potom N je zřejmě borelovská množina a pro každé $\delta > 0$ je $\delta \cdot k \in \mathcal{U}(1_N)$. Tudíž N má harmonickou míru 0.

Nechť $z \in \partial U \setminus N$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$f(z) \leq \liminf_{x \to z}(Hf(x) + \varepsilon \cdot k(x)) \leq \limsup_{x \to z} Hf(x) + \varepsilon \cdot \liminf_{x \to z} k(x).$$

Protože $\liminf_{x \to z} k(x) < \infty$, dostáváme nerovnost

$$f(z) \leq \limsup_{x \to z} Hf(x).$$

Důkaz se nyní dokončí přechodem k funkci $-f$. □

3.8.12. Korolár. *Nechť $x \in U$. Potom je zobrazení $f \mapsto Hf$, $f \in L^1(\mu_x)$, prosté.*

Důkaz. Plyne okamžitě z (3.8.11). □