Věta o substituci

Připomeňme nejprve větu o transformaci Lebesgueovy míry při lineárním zobrazení: *Jestliže* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *je lineární zobrazení, potom*

$$\lambda_d\big(\varphi(A)\big) = |\det \varphi| \cdot \lambda_d(A), \quad A \in \mathcal{L}^d. \tag{1}$$

Nechť $V \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ je prosté regulární zobrazení, tedy φ je prosté zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a jakobián J_φ je nenulový na V. Potom je $\varphi(V)$ otevřená množina, $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ (takže φ je difeomorfismus) a na $\varphi(V)$ platí rovnost $J_{\varphi^{-1}} = 1/J_\varphi \circ \varphi^{-1}$. Je-li speciálně φ prosté lineární zobrazení, potom z (1) dostáváme:

$$\int_{\varphi(V)} h \, d\lambda_d = \int_V (h \circ \varphi)|J_\varphi| \, d\lambda_d, \quad h \in C_c\big(\varphi(V)\big). \tag{2}$$

(Pro otevřenou množinu U značíme $C_c(U)$ (resp. $C_c^+(U)$) množinu všech reálných (resp. nezáporných reálných) funkcí $g : U \to \mathbb{R}$, které jsou spojité a jejichž nosič $S(g) := \overline{\{x \in U : g(x) \neq 0\}}$ je kompaktní podmnožina U.)

Naším cílem je dokázat rovnost (2) pro případ, že $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ je prosté regulární zobrazení. V důkazu využijeme techniku *shlazování*. Někdy bude vhodné v integrandu vyznačit integrační proměnnou; pak např. místo $\int_{\varphi(V)} h \, d\lambda_d$ budeme psát $\int_{\varphi(V)} h(y) \, dy$ apod.

Nechť $\omega \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} \omega \, d\lambda_d = 1$. Je-li $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ prosté lineární zobrazení, potom

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\omega \circ \psi) \, d\lambda_d = \frac{1}{|\det \psi|} \tag{3}$$

(v (2) se zvolí $V = \mathbb{R}^d$, $\varphi = \psi$ a $h = \omega$).
Pro $r > 0$ definujeme

$$\omega_r(y) := r^{-d} \omega(y/r), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Z (3) dostáváme $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_r \, d\lambda_d = 1$ pro každé $r > 0$. Zvolme $R > 0$ takové, že $S(\omega) \subset B_R(0)$. (Zde užíváme označení $B_\rho(x)$ pro uzavřenou kouli o středu v bodě $x \in \mathbb{R}^d$ a o poloměru $\rho > 0$.) Potom $S(\omega_r) \subset B_{rR}(0)$. V tomto smyslu tedy funkce ω_r aproximují Diracovu míru ε_0 soustředěnou v počátku. Např. pro libovolnou funkci $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} g\, d(\omega_r \lambda_d) = g(0) \ \left(= \int_{\mathbb{R}^d} g\, d\varepsilon_0 \right).$$

Nechť $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. *Shlazením* funkce f pomocí ω_r se rozumí funkce

$$f * \omega_r : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, \omega_r(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Z Lebesgueovy věty plyne spojitost funkce $f * \omega_r$. Protože

$$(f * \omega_r)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, \omega_r(x-t)\, dt,$$

(invariance λ_d vzhledem k posunutí), platí

$$S(f * \omega_r) \subset \bigcup \big\{ B_{rR}(t) : t \in S(f) \big\}, \tag{4}$$

takže $f * \omega_r \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Užitím (3) dostáváme

$$(f * \omega_r)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x - rz) - f(x) \big)\, \omega(z)\, dz, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Protože funkce f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$, je

$$f * \omega_r \to f \quad \text{stejnoměrně na } \mathbb{R}^d \text{ pro } r \to 0+ \tag{5}$$

(připomeňme, že pro $z \notin B_R(0)$ je $\omega(z) = 0$).

Nechť $y \in \varphi(V)$, $x = \varphi^{-1}(y)$ a nechť $V(r) := (1/r)(V - x)$. Potom (opět se užije (3)) platí

$$\int_V \omega_r\big(\varphi(z) - \varphi(x)\big)\, dz = \int_{V-x} \omega_r\big(\varphi(x+s) - \varphi(x)\big)\, ds =$$
$$\int \chi_{V(r)}(t) \cdot \omega\left(\frac{1}{r} \big(\varphi(x + rt) - \varphi(x) \big) \right) dt.$$

Protože funkce ω je spojitá a φ je v bodě x diferencovatelná, z Fatouova lemmatu plyne (v druhém integrálu se znovu užije (3))

$$\liminf_{r\to 0+} \int_V \omega_r\big(\varphi(z)-\varphi(x)\big)\,dz \geq \int_{\mathbb{R}^d} \omega\big(\varphi'(x)(t)\big)\,dt = \frac{1}{|J_\varphi(x)|}\cdot \int_{\mathbb{R}^d} \omega(s)\,ds = \frac{1}{|J_\varphi(x)|}\,.$$

Platí tedy

$$\liminf_{r\to 0+} \big|J_\varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big| \int_V \omega_r\big(\varphi(z)-y\big)\,dz \geq 1, \quad y\in\varphi(V). \tag{6}$$

Nechť $h\in C_c^+\big(\varphi(V)\big)$. Pro $r>0$ definujeme

$$I_r := \int_{V\times\varphi(V)} h(y)\,\big|J_\varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big|\,\omega_r\big(\varphi(z)-y\big)\,dz\,dy.$$

(integruje se tedy vzhledem k míře $\lambda_d\times\lambda_d$). Položme $f := h\cdot|J_\varphi\circ\varphi^{-1}|$ na $\varphi(V)$ a $f=0$ na $\big(\varphi(V)\big)^c$. Potom $f\in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ a ze (4) vidíme, že existují $r_0>0$ a kompaktní množina $K\subset\varphi(V)$ takové, že $S(f*\omega_r)\subset K$ pro všechna $0<r<r_0$. Pro taková r podle Fubiniovy věty platí

$$I_r = \int_{\varphi^{-1}(K)} (f*\omega_r)\big(\varphi(z)\big)\,dz.$$

Protože $\lambda_d\big(\varphi^{-1}(K)\big)<\infty$, z Lebesgueovy věty a z (5) dostáváme

$$\lim_{r\to 0+} I_r = \int_V f\big(\varphi(z)\big)\,dz = \int_V (h\circ\varphi)|J_\varphi|\,d\lambda_d, \tag{7}$$

neboť $|J_\varphi\circ\varphi^{-1}|\circ\varphi = |J_\varphi|$ na V.

Z Fubiniovy věty vyplývá

$$I_r = \int_{\varphi(V)} h(y)\cdot\Big(\big|J_\varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big|\cdot\int_V \omega_r\big(\varphi(z)-y\big)dz\Big)dy.$$

Aplikace Fatouova lemmatu a nerovnost (6) dávají

$$\liminf_{r\to 0+} I_r \geq \int_{\varphi(V)} h\,d\lambda_d. \tag{8}$$

Výsledkem rovnosti (7) a nerovnosti (8) je toto tvrzení.

Tvrzení 1. *Jestliže $V \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ je prosté regulární zobrazení, potom platí*

$$\int_{\varphi(V)} h \, d\lambda_d \leq \int_V (h \circ \varphi) \, |J_\varphi| \, d\lambda_d, \quad h \in C_c^+\big(\varphi(V)\big). \tag{9}$$

Nyní budeme aplikovat nerovnost (9) na $\varphi(V)$ a φ^{-1} místo V a φ. Pro každou funkci $g \in C_c^+(V)$ tedy platí

$$\int_V g \, d\lambda_d \leq \int_{\varphi(V)} (g \circ \varphi^{-1}) \, |J_{\varphi^{-1}}| \, d\lambda_d. \tag{10}$$

Předpokládejme, že $h \in C_c^+\big(\varphi(V)\big)$ a aplikujme nerovnost (10) na funkci $g := (h \circ \varphi) \, |J_\varphi| \in C_c^+(V)$. Dostáváme

$$\int_V (h \circ \varphi) \, |J_\varphi| \, d\lambda_d \leq \int_{\varphi(V)} (h \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \, |J_\varphi \circ \varphi^{-1}| \cdot |J_{\varphi^{-1}}| \, d\lambda_d = \int_{\varphi(V)} h \, d\lambda_d,$$

takže v (9) platí rovnost.

Nechť stále $V \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ je prosté regulární zobrazení. Zvolme kompaktní množinu L a omezenou otevřenou množinu U takové, že $L \subset U \subset \bar{U} \subset V$. Nechť $A \subset L$ je borelovská množina. Potom $\varphi(A)$ je borelovská množina a podle důsledku Luzinovy věty existují funkce $h_n \in C_c\big(\varphi(V)\big)$, $0 \leq h_n \leq 1$, $S(h_n) \subset U$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $h_n \to \chi_{\varphi(A)}$ λ_d - s.v.

Protože $\lambda_d\big(\varphi(U)\big) < \infty$ a

$$\int_{\varphi(V)} h_n \, d\lambda_d = \int_V (h_n \circ \varphi) \, |J_\varphi| \, d\lambda_d,$$

podle Lebesgueovy věty dostáváme

$$\lambda_d\big(\varphi(A)\big) = \int_A |J_\varphi| \, d\lambda_d. \tag{11}$$

Nechť L_n jsou kompaktní množiny takové, že $L_n \nearrow V$. Pro borelovskou množinu $A \subset V$ je $A \cap L_n \nearrow A$ a tedy platí (11). Speciálně pro každou borelovskou množinu $A \subset V$, pro níž $\lambda_d(A) = 0$ je $\lambda_d\big(\varphi(A)\big) = 0$, tedy φ *zobrazuje* λ_d*-nulové množiny na* λ_d*-nulové množiny.* Odtud a z (11) dostáváme větu o transformaci Lebesgueovy míry při prostém regulárním zobrazení.

Věta 1. *Nechť* $V \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená množina a* $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ *je prosté regulární zobrazení. Jestliže* $A \in \mathcal{L}^d$, $A \subset V$, *potom* $\varphi(A) \in \mathcal{L}^d$ *a*

$$\lambda_d\big(\varphi(A)\big) = \int_A |J_\varphi| \, d\lambda_d. \tag{12}$$

Z této věty plyne následující verze věty o substituci, jejíž speciální případ pro $M = \varphi(V)$ a $f \in C_c^+\big(\varphi(V)\big)$ jsme již dokázali.

Korolár 1. *Pro* $M \subset \varphi(V)$ *a komplexní nebo numerickou funkci* f *na* M *platí rovnost*

$$\int_M f \, d\lambda_d = \int_{\varphi^{-1}(M)} (f \circ \varphi) \, |J_\varphi| \, d\lambda_d, \tag{13}$$

pokud má jedna strana smysl.

Důkaz. Podle (12) pro obraz míry λ_d při zobrazení φ^{-1} platí

$$\varphi^{-1}(\lambda_d)(A) = \int_A |J_\varphi| \, d\lambda_d \tag{14}$$

pro každou množinu $A \in \mathcal{L}^d$, $A \subset V$. Z věty o integraci podle obrazu míry plyne: je-li g komplexní nebo numerická funkce na V, potom

$$\int_V g \, d\varphi^{-1}(\lambda_d) = \int_{\varphi(V)} (g \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda_d, \tag{15}$$

pokud má jedna strana smysl. Potom ze (14) plyne, že integrál vlevo, pokud má smysl, je roven

$$\int_V g\,|J_\varphi|\,d\lambda_d. \tag{16}$$

Nechť f je nezáporná numerická funkce na množině $M \subset \varphi(V)$. Položme $f = 0$ na $\varphi(V) \backslash M$. $\square$

Nechť levá strana rovnosti (13) má smysl. Potom $M \in \mathcal{L}^d$, funkce f je měřitelná a $\varphi^{-1}(M) \in \mathcal{L}^d$. Položme $g := f \circ \varphi$. Potom g je měřitelná a $g = 0$ na $\varphi^{-1}(M)$. Podle (15) a (16) platí (13).

Nechť pravá strana má smysl. Pak $\varphi^{-1}(M) \in \mathcal{L}^d$ (tudíž také $M \in \mathcal{L}^d$) a $f \circ \varphi$ je měřitelná (tudíž také f je měřitelná). Tedy levá strana má smysl a tudíž platí (13). Pro numerickou funkci f na M se rovnost (13) ověří pomocí rozkladu $f = f^+ - f^-$. Pro komplexní funkci se rovnost ověří pomocí rozkladu na reálnou a imaginární část funkce f.