KONVERGENCE POSLOUPNOSTI NÁHODNÝCH VELIČIN A NÁHODNÝCH VEKTORŮ

2. CVIČENÍ

1. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$. Definujme $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Ukažte, že platí:
   (a) $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} 1$.
   (b) $n(1 - Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Y$, kde Y má Exponenciální rozdělení s parametrem 1.
   (c) $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 1$.
   (d) Definujme dále $U_n = \overline{X}_n$. Vyšetřete konvergenci $\{U_n\}$ v pravděpodobnosti a v distribuci.
2. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Určete asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda)$.
   (b) Určete asymptotické rozdělení $\dfrac{n\,(\overline{X}_n - \lambda)^2}{\lambda}$.
   (c) Dokažte, že $\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\overline{X}_n}}$ konverguje v distribuci k $\mathsf{N}(0,1)$.
3. Ukažte, že má-li X_n Studentovo t_n rozdělení, pak X_n konverguje v distribuci k $\mathsf{N}(0,1)$ pro $n \to \infty$.
4. Nechť X_n má rovnoměrné rozdělení na $[0, 1/n]$ a definujte $Y_n = X_n^2$.
   (a) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{X_n\}$ pro $n \to \infty$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti $\{Y_n\}$ pro $n \to \infty$.
5. Nechť $X_n \sim \mathsf{N}(\mu, 1/n)$.
   (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mu$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\sqrt{n}(X_n - \mu)$.
   (c) Ukažte, že konvergence z (b) implikuje tvrzení z (a).

   Poznámka: Tvrzení (c) lze zobecnit následovně: Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel taková, že $a_n \to \infty$ a $a_n(X_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} X$ pro $n \to \infty$, kde X je nějaká konečná náhodná veličina, pak platí $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mu$. Důkaz je zcela analogický.
6. Uvažujte posloupnost nezávislých hodů mincí a náhodné veličiny X_n, které jsou identifikátory toho, zda v n-tém hodu padl orel (a ten padne s pravděpodobností $1/2$). Nechť $Y_n = 1 - X_n$ a $X = X_1$.
   (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} X$ a $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} X$, ale $\{X_n + Y_n\}$ nekonverguje v distribuci k $X + X = 2X$.
   (b) Ukažte, že $(X_n, Y_n)^T$ nekonverguje v distribuci k $(X, X)^T$ (tj. konvergence po složkách neimplikuje konvergenci vektorů).

Opakování z přednášky

Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je posloupnost k-rozměrných náhodných vektorů a $\mathbf{X}$ je k-rozměrný náhodný vektor. Pak řekneme, že

- $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \mathbf{X}$, pokud
$$\mathsf{P}\big(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}\big) = 1,$$
- $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathbf{X}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$
$$\mathsf{P}\big(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| > \varepsilon\}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
- $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathbf{X}$, pokud pro distribuční funkce platí
$$F_n(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x}) \quad \text{ve všech bodech } \mathbf{x}\text{, ve kterých je } F \text{ spojitá,}$$
kde F_n je distribuční funkce $\mathbf{X}_n$ a F je distribuční funkce $\mathbf{X}$.

Platí:

- konvergence náhodných vektorů implikuje konvergenci po složkách, opak platí jen pro konvergence s.j. a v P,
- platí $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathbf{X}$ a žádná z implikací obecně opačně neplatí,
- jestliže $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathbf{k} \equiv konst \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathbf{k}$,
- spojitá transformace zachovává všechny uvedené konvergence,
- **Cramérova-Slutského věta** (CS): (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Z_n\}$ jsou posloupnosti náhodných veličin takových, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} X$, $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} c$ a $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} d$, kde X je náhodná veličina a $c, d \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty. Pak
$$Y_n \cdot X_n + Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} c \cdot X + d.$$
Pro $c \neq 0$ platí také
$$X_n / Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} X/c.$$
- **Silný zákon velkých čísel** (SZVČ): Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení s konečnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$. Pak $\overline{\mathbf{X}}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \boldsymbol{\mu}$ pro $n \to \infty$.
- **Centrální limitní věta** (CLV): Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr p-rozměrných náhodných vektorů z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Pak platí
$$\sqrt{n}\left(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathbf{X} \sim \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$
Zkráceně budeme psát
$$\sqrt{n}\left(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$