Asymptotické rozdělení

3. cvičení

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$ s hustotou $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{I}[x \geq 0]$.
   (a) Uvažujte $T_n = (\overline{X}_n)^{-1}$. Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti T_n pro $n \to \infty$.
   Poznámka: T_n je maximálně věrohodný odhad λ, což snadno samostatně ověříte.
   (b) Nalezněte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$.
   (c) Uvažujte $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i > 1]$. Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti U_n a nalezněte asymptotické rozdělení U_n.
   (d) Definujme $V_n = -\log(U_n)$. Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení V_n.

   K výpočtu momentů exponenciálního rozdělení využijte gamma funkci: $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$. *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x) = \dfrac{p}{x^{1+p}} \mathbb{I}[x \geq 1]$, kde $p > 0$. Uvažujte
$$T_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}.$$
   (a) Ukažte, že T_n je maximálně věrohodný odhad parametru p.
   (b) Ukažte, že pro $n \to \infty$ platí $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} p$.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $\sqrt{n}\,(T_n - p)$.
   (d) Uvažujte odhad $U_n = \overline{X}_n / (\overline{X}_n - 1)$. Ukažte, že se jedná o momentový odhad p a vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti U_n.
   (e) Odvoďte asymptotické rozdělení U_n.
   (f) Pro $p = 3$ odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $Z_n = (\overline{X}_n)^3$. Porovnejte rozptyl Z_n s jejím asymptotickým rozptylem.

3. Nechť $X_1, \dots, X_n$ tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_X > 0$, a nechť $Y_1, \dots, Y_n$ jsou od nich nezávislé, a tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_Y > 0$. Odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $T_n = \overline{X}_n / \overline{Y}_n$.

4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tvoří náhodný výběr z binomického rozdělení $\mathsf{Bi}(2, p)$, kde $p \in (0,1)$. Nechť $Y_i = \mathbb{I}[X_i = 0]$.
   (a) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti $U_n = \sqrt{\overline{X}_n + \overline{Y}_n - 1}$.
   (b) Nalezněte asymptotické rozdělení U_n.
   (c) Uvažujte náhodné vektory tvaru $(\overline{X}_n/2, U_n)^\mathsf{T}$. Vyšetřete jejich konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

DELTA METODA

- *Jednorozměrná verze*: Nechť $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ, pak

$$\sqrt{n}\left(g(T_n) - g(\mu)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2).$$

- *Obecná verze*: Nechť $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $\sqrt{n}\,(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ pro nějaké $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ pozitivně semi-definitní, a nechť $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ má spojité parciální derivace na nějakém okolí bodu $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$. Označme

$$\mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

  Pak

$$\sqrt{n}\,(\mathbf{g}(\mathbf{T}_n) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_m\Big(\mathbf{0}, \mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\mu})\right)^{\mathsf{T}}\Big).$$

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA (CLV): Nechť $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Pak platí

$$\sqrt{n}\,(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$