

# JEDNOVÝBĚROVÉ TESTY: T-TEST, KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV TEST

## 9. CVIČENÍ

### ÚVODNÍ NASTAVENÍ.

- Stáhněte si data `Hosi.txt` a `lq.txt`. Můžete si stáhnout i zdrojový kód ke cvičení `cviceni09.R`.
- Otevřete si program R Studio.
- Změňte si pracovní adresář pomocí `Session` → `Set working directory` → `Choose directory` nebo napište přímo použijte příkaz `setwd`, do kterého zadáte cestu do tohoto adresáře.
- Vyčistěte si pracoviště od starých objektů, které zůstaly uloženy:  
`rm(list=ls())`
- Načtěte si data `Hosi.txt` a `lq.txt`. Pro jistotu se podívejte na prvních několik řádků (příkaz `head`) a ujistěte se, že se Vám data dobře načetla. Můžete zavolat i `summary`.
- Do proměnné `alpha` uložte testovací hladinu 0.05, na které budeme provádět většinu dnešních testů.

### I. JEDNOVÝBĚROVÝ *t*-TEST

1. Opět se budeme zabývat porodní hmotností, ale tentokrát budeme pracovat pouze s (náhodným) podvýběrem o rozsahu  $n = 100$  pozorování.

```
set.seed(2022);
hmot100 <- sample(Hosi$por.hmot, 100)
```

Abychom měli všichni stejný podvýběr, zvolili jsme si pevné nastavení generátoru pseudonáhodných čísel pomocí `set.seed`. Uložte si do `n` rozsah výběru `hmot100`.

2. Na [internetové stránce ČSÚ](#) se v zásadě uvádí, že je průměrná porodní hmotnost novorozenečků chlapců rovna 3,349 kg. Ověřte, zda jsou naše data v souladu s tímto tvrzením.

- (a) Zformulujte vhodný pravděpodobnostní model a pokuste se graficky posoudit, zda je vhodný pro naše data.
- (b) Zformulujte nulovou a alternativní hypotézu.
- (c) Proveďte test pomocí funkce `t.test`.

```
t.test(hmot100, mu=3349)
```

Společně si řekneme, co jednotlivé části výstupu znamenají.

- (d) Rozhodněte o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy. Zformulujte závěr.

3. Nyní si jednotlivé části z výstupu funkce `t.test` spočítáme „ručně“. Jak víme, testová statistika má tvar

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$$

a má za nulové hypotézy  $t_{n-1}$  rozdělení. Spočteme ji tedy následovně:

```
(tstat=sqrt(n)*(mean(hmot100)-3349)/sd(hmot100))
```

a klasickým způsobem testování bychom její absolutní hodnotu porovnali s kritickou hodnotou  $qt(1 - \alpha/2, df=n-1)$

Jaký závěr dostáváme z tohoto porovnání?

My ale máme ve výstupu p-hodnotu. Ta udává nejmenší hladinu testu, na které bychom nulovou hypotézu ještě zamítli. Zároveň vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou bychom za nulové hypotézy dostali ještě „méně příznivý“ výsledek než je hodnota naší testové statistiky. Pokud jsme napozorovali hodnotu  $t$ , spočítáme ji tedy jako  $p = P(|W| > |t|) = 2(1 - F_W(|t|))$ , kde  $W$  je náhodná veličina s  $t_{n-1}$  rozdělením a  $F_W$  je její distribuční funkce. V R :

```
2*(1-pt(abs(tstat), df=n-1))
```

Konečně, intervalový odhad parametru  $\mu_X$  spočítáme

```
mean(hmot100)-qt(1 - alpha/2, df=n-1)/sqrt(n)*sd(hmot100)
mean(hmot100)+qt(1 - alpha/2, df=n-1)/sqrt(n)*sd(hmot100)
```

Vzpomeňte si na dualitu mezi intervalovým odhadem a testem hypotézy (viz přednáška).

4. Někdy se nám může hodit umět přistupovat k jednotlivým položkám výsledku funkce `t.test`.

```
tt=t.test(hmot100,mu=3349)
names(tt)
tt$stat
tt$p.val
```

Zkuste si takto nechat vypsat interval spolehlivosti pro  $\mu$  a podívejte se, jakou test uvažuje alternativu.

5. Nechejte si vypsat interval spolehlivosti s pravděpodobností pokrytí 0,99. Ve funkci `t.test` nastavte `conf.level = 0.99`. Pouze na základě tohoto intervalu rozhodněte o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy na testovací hladině 0,01.
6. Podobně jako v bodě 2. otestujte, zda je pravdivé tvrzení, že je střední porodní hmotnost chlapců nižší než 3,5 kg.
- Zformulujte nulovou a alternativní hypotézu a řádně interpretujte výsledek.
  - Všimněte si, jaký intervalový odhad nám nyní R nabízí.
7. Jak bychom ručně spočítali p-hodnotu z 6?
8. Ve 3. jsme konstruovali interval spolehlivosti na základě t-rozdělení uvedené statistiky  $T_n$ . Jaké je její limitní rozdělení pro  $n \rightarrow \infty$ ? Spočtete asymptotický intervalový odhad  $\mu$  konstruovaný na základě tohoto limitního rozdělení. Porovnejte oba intervaly. Který z nich je širší?
9. Spočítejte také p-hodnotu příslušného asymptotického testu. Jaký model zde stačí předpokládat? A na základě kterého rozdělení se doporučuje počítat p-hodnotu (resp. kritickou hodnotu)?
10. Doposud jsme k testování používali jenom část dat, a to proto, abychom mohli provést následující porovnání: Proveďte ještě jednou testy z 2. a 6. pro celá data a porovnejte je s výsledkem pro náš podvýběr. Co pozorujeme? Co z toho vyplývá pro praxi?

## II. KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV TEST

11. Načtete si data `Iq.txt`, která se týkají hodnot IQ a známek na ZŠ náhodně vybraných žáků. Prohlédněte si data a proměnné, které máme k dispozici.
12. Bude nás zajímat IQ žáků, proto si hodnoty uložte do proměnné `IQ` a do `n` si uložte rozsah výběru.

```
IQ = Iq$iq;
n = length(IQ)
```

Jakými popisnými statistikami byste popsali data? Jaké obrázky ilustrují rozdělení dat?

13. Na [wikipedii](#) se uvádí, že IQ má v populaci normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15. Zajímá nás, zda naše data podporují nebo vyvracejí toto tvrzení.
- (a) Jaký model předpokládáme pro naše data? Formulujte nulovou a alternativní hypotézu, kterou budeme testovat.
- (b) Provedeme Kolmogorovův-Smirnovův test  

```
ks.test(IQ, y="pnorm", mean=100, sd=15)
```

Poznámka: R nás upozorňuje, že v datech se objevují shodná pozorování. Pomocí `table(IQ)` si můžeme nechat vypsát tabulku četností.
- (c) Jaký je náš závěr?
14. Z přednášky víme, že testová statistika má tvar  $K_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F_0(x)|$ , ale pro výpočet se používá

$$K_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - F_0(X_{(i)}) \right), \quad K_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F_0(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right), \quad K_n = \max(K_n^+, K_n^-).$$

Ověříme tedy, že R počítá opravdu tuto testovou statistiku:

```
F0 <- function(x) pnorm(x, mean=100, sd=15)
IQ.sorted=sort(IQ)
Knplus <- max((1:n)/n - F0(IQ.sorted))
Knminus <- max(F0(IQ.sorted) - (0:(n-1))/n)
(Kn <- max(Knplus, Knminus))
```

Za nulové hypotézy má  $\sqrt{n}K_n$  asymptoticky rozdělení s distribuční funkcí

$$G(y) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 y^2}.$$

Pomocí konečné aproximace této distribuční funkce můžeme p-hodnotu testu spočítat

```
G <- function(y){
  k <- 1:10000; # aproximace nekonecne sumy
  1 - 2*sum((-1)^(k+1)*exp(-2*k^2*y^2))
}
1 - G(sqrt(n)*Kn)
```

Kdybychom chtěli znát kritickou hodnotu, tak vlastně hledáme  $c$  takové, že  $P(\sqrt{n}K_n \geq c) = \alpha$  za platnosti  $H_0$ , tj.  $G(c) = 1 - \alpha$ . To musíme vyřešit numericky:

```
fce <- function(x) G(x) - (1 - alfa)
(krit <- uniroot(fce, c(0.1,10))$root)
sqrt(n)*Kn
```

15. Celou situaci si graficky znázorníme. Vzpomeňte si na odvození tzv. pásu spolehlivosti pro distribuční funkci, které jste měli na přednášce.

```
empir.df <- ecdf(IQ);
plot(empir.df, ylab="", main="Porovnaní distribučních funkcí", do.points=F)

# pás spolehlivosti
xgrid <- seq(min(IQ)-10, max(IQ)+10, length=10000);
dolni.pas <- pmax(empir.df(xgrid)-krit/sqrt(n),0)
horni.pas <- pmin(empir.df(xgrid)+krit/sqrt(n),1)
polygon(c(xgrid, rev(xgrid)), c(horni.pas, rev(dolni.pas)), col = "gray90", border="gray70", lty=2)

plot(empir.df, verticals=FALSE, add=T, lwd=2, do.points=FALSE)
  lines(xgrid, F0(xgrid), col="blue", lwd=2); # graf F_0

# Bod největšího rozdílu
k0 <- which.max(F0(IQ.sorted) - (0:(n-1))/n);
abline(v=IQ.sorted[k0], col="red");

legend("bottomright", col=c("black", "grey70", "blue"), lty=c(1,2,1),
  legend=c("empirická d.f.", "pás spolehlivosti", "d.f. za nulové hypotézy"))
```

16. Připomeňte si, že Kolmogorovův-Smirnovův test předpokládá, že je  $F_0$  specifikovaná úplně, včetně hodnot všech parametrů. V případě, že tomu tak není (pokud bychom parametry odhadovali z dat), tak nám K-S test nedává správnou p-hodnotu (rozdělení testové statistiky za nulové hypotézy je jiné). Ukážeme si to na malé simulaci, kdy budeme generovat data o stejném rozsahu, tedy  $n = 111$ , z  $N(100, 15^2)$  a budeme provádět K-S test jednak se zadanými parametry a jednak s parametry odhadnutými z dat.

```
nopak <- 10000
pval.zname <- numeric(nopak)
pval.nezname <- numeric(nopak)
n<-111

for(i in 1:nopak){
  Y <- rnorm(n, mean=100, sd=15);
  pval.zname[i] <- ks.test(Y, y="pnorm", mean=100, sd=15)$p.value;
  pval.nezname[i] <- ks.test(Y, y="pnorm", mean=mean(Y), sd=sd(Y))$p.value;
}

mean(pval.zname <= 0.05)
mean(pval.nezname <= 0.05)
```

Poslední dvě hodnoty nám odhadují skutečnou hladinu testu (měla by být 0,05). Vidíme, že dostáváme dvě velmi rozličné hodnoty. Co lze tedy říci o K-S testu v případě, že bychom ho špatně používali s parametry odhadnutými z dat?

Můžeme si porovnat i histogramy p-hodnot pro obě situace. Podle tvrzení 4.1. by za platnosti  $H_0$  měla mít  $p(\mathbf{X})$  rovnoměrné rozdělení na  $[0, 1]$ .

```
hist(pval.zname,prob=TRUE,main="p-hodnota pro zname parametry")
hist(pval.nezname,prob=TRUE,main="p-hodnota pro nezname parametry")
```

17. Dalším důležitým předpokladem K-S testu je spojité rozdělení dat. Pomocí následující simulace se podíváme na skutečnou hladinu testu, použijeme-li nesprávně K-S test (s distribuční funkcí  $G$ ) pro test shody s binomickým rozdělením  $\text{Bi}(N, p)$  na základě dat o rozsahu  $n$ .

```
nopak=10000
pval=numeric(nopak)
n=100

N=10
p=1/3
F0=function(x) pbinom(x, size=N, prob=p)

set.seed(123)
for(i in 1:nopak){
  x = rbinom(n,size=N,prob=p)
  xi=unique(c(x,0:N))
  Kn=max(abs(ecdf(x)(xi)-F0(xi)))
  pval[i]=1-G(sqrt(n)*Kn)
}
mean(pval<=0.05)

hist(pval)
```

Co lze na základě předchozí simulace říci o K-S testu, použijeme-li jej pro  $F_0$  s diskretním rozdělením?

Zkuste v předchozí simulaci zvýšit  $N$  na 2 000. Co sledujeme?

### III. SIMULACE

18. Provedeme simulace z rovnoměrného a exponenciálního rozdělení a budeme zkoumat skutečnou hladinu testu při použití asymptotického testu (tj. při použití t-testu na nenormální data).

```
n=100
opak=1000
p.rovn=numeric(opak)
p.exp=numeric(opak)
```

```
for(i in 1:opak){
  x1=runif(n)
  p.rovn[i]=t.test(x1,mu=1/2)$p.val

  x2=rexp(n,rate=1)
  p.exp[i]=t.test(x2,mu=1)$p.val
}

mean(p.rovn<=0.05)
mean(p.exp<=0.05)
```

```
hist(p.rovn,prob=TRUE)
hist(p.exp,prob=TRUE)
```

Zkuste změnit počet pozorování  $n$  (zmenšit a zvětšit). Pro jaké  $n$  je rozumné použít asymptotický test?

19. Podobné simulace provedeme za alternativy a budeme sledovat sílu testu.

```
n=100
opak=1000
p.rovn=numeric(opak)
p.exp=numeric(opak)

for(i in 1:opak){
  x1=runif(n,0,1.2)
  p.rovn[i]=t.test(x1,mu=1/2)$p.val

  x2=rexp(n,rate=1.2)
  p.exp[i]=t.test(x2,mu=1)$p.val
}

mean(p.rovn<=0.05)
mean(p.exp<=0.05)
```

```
hist(p.rovn,prob=TRUE)
hist(p.exp,prob=TRUE)
```

Vyzkoušejte měnit parametry rozdělení a sledovat, jak se mění síla, pokud se od nulové hypotézy vzdalujeme. Podobně, nechejte parametry rozdělení fixní a sledujte, jak se mění síla, pokud zvyšujeme počet pozorování. Učiňte nějaký obecný závěr z tohoto zkoumání.