

DVOUVÝBĚROVÉ TESTY

11. CVIČENÍ

ÚVODNÍ NASTAVENÍ.

- Stáhněte si data `lq.txt` a zdrojové kódy `cviceni11.R` a `figKS.R`, případně i `cviceni11-obrazky.R`.
- Otevřete si program **R Studio**, změňte si pracovní adresář a vyčistěte pracoviště.
- Do proměnné `alpha` uložte testovací hladinu 0.05.

DATA. Data `lq.txt` obsahují informace o náhodně vybraných žácích osmé třídy základní školy. Pro každého máme k dispozici jeho IQ, pohlaví (kódování 1 dívky a 0 chlapci) a dále pak průměrnou známku na vysvědčení v pololetí sedmé třídy a v pololetí osmé třídy. Upravte svoje data tak, aby odpovídali následujícímu popisu:

IQ hodnota IQ,
zn7 průměrná známka na vysvědčení v pololetí sedmé třídy,
zn8 průměrná známka na vysvědčení v pololetí osmé třídy,
pohlavi pohlaví žáka (1- žena, 0 - muž)
FPohlavi jinak kódované pohlaví žáka (faktor kategorie `chlapec`, `divka`).

Načtení a úpravu dat provedete následovně:

```
Iq = read.table("Iq.txt",header=T)
colnames(Iq)[2] = "IQ"
levels(Iq$Pohlavi)
Iq$FPohlavi = factor(Iq$pohlavi, levels = c(0,1), labels=c("chlapec","divka"))
```

DVOUVÝBĚROVÝ PROBLÉM

1. Ujistěte se, že se Vám data dobře načetla.

```
summary(Iq)
attach(Iq)
```

Prohlédněte si základní charakteristiky polohy jednotlivých veličin pomocí funkce `summary`. Všimněte si rozličného výstupu pro veličiny `pohlavi` a `FPohlavi`.

Příkaz `attach` nám zpřístupní jednotlivé proměnné z dat, takže je budeme moci volat přímo jejich názvem (např. `IQ` namísto `lq$IQ`).

2. Pomocí vhodného obrázku vizualizujte genderové složení našeho datového vzorku.
3. Budeme se zabývat otázkou, zda se nějak liší IQ u chlapců a dívek. Začneme nejprve prohlídkou popisných statistik.

```

IQchlapci=IQ[FPohlavi=="chlapec"]
IQdivky=IQ[FPohlavi=="divka"]

# charakteristiky polohy dle pohlavi
summary(IQchlapci)
summary(IQdivky)

# nebo rychleji pomoci 1 prikazu
tapply(IQ,FPohlavi,summary)

# podmínene sd
tapply(IQ,FPohlavi,sd)

```

Co usuzujete na základě těchto číselných charakteristik?

4. Problém si ještě budeme vizualizovat:

```

boxplot(IQ~FPohlavi)

# totez jako
boxplot(IQchlapci,IQdivky,names=c("chlapci","divky"))

# muzeme vybarvit a doplnit popisky:
boxplot(IQ~FPohlavi,ylab="IQ",col=c("lightblue","pink"))

```

Co usuzujeme z tohoto obrázku?

5. Nyní se podíváme na to, zda je možné (resp. vhodné) předpokládat, že oba výběry pocházejí z normálního rozdělení.

```

par(mfrow=c(1,2))
hist(IQchlapci,prob=T,xlim=c(60,150))
hist(IQdivky,prob=T,xlim=c(60,150))

par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(IQchlapci,main="Chlapci")
qqline(IQchlapci)
qqnorm(IQdivky,main="Divky")
qqline(IQdivky)
par(mfrow=c(1,1))

```

DVOUVÝBĚROVÝ KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV TEST

6. Pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu budeme testovat, zda je rozdělení IQ chlapců i dívek stejné.

- Co předpokládáme za model?
- Jak zní nulová a alternativní hypotéza?
- Provedeme test:

```
ks.test(IQdivky, IQchlapci, exact = FALSE)
```

Jaký je náš závěr?

7. Testová statistika tohoto testu má tvar¹

$$K_{n,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_X(x) - \widehat{F}_Y(x)|.$$

Ověříme, že R počítá podle stejného předpisu:

```
e1=ecdf(IQchlapci)
e2=ecdf(IQdivky)
max(abs(e1(IQ)-e2(IQ)))
```

Kdybychom chtěli zjistit, kde maximum nastává:

```
IQ[which.max(abs(e1(IQ)-e2(IQ)))]
```

Celou situaci si můžeme i vizualizovat pomocí následujícího obrázku:

```
source("figKS.R")
figKS(IQ, FPohlavi)
```

DVOUVÝBĚROVÝ *t*-TEST

8. Pomocí dvouvýběrového *t*-testu budeme testovat shodu středních hodnot IQ u chlapců a dívek. Nejprve použijeme verzi pro shodné rozptyly.

- Jaký předpokládáme model? Jsou tyto předpoklady pro naše data reálné?
- Napište, jaké hypotézy testujeme a porovnejte je s hypotézami K-S testu.
- Připomeňte si tvar testové statistiky tohoto testu:

$$T_{n,m} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{n,m}}, \quad S_{n,m}^2 = \frac{1}{n+m-2} ((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2).$$

Jaké je její přesné rozdělení za nulové hypotézy (v předpokládaném modelu)?

(d) Provedeme test:

```
t.test(IQ ~ FPohlavi, var.equal = TRUE)
# nebo jiný způsob zadání:
t.test(IQchlapci, IQdivky, var.equal = TRUE)
```

Jaký je náš závěr ohledně středních hodnot IQ? Co odhaduje uvedený interval spolehlivosti?

9. Spočítáme hodnotu testové statistiky manuálně:

¹Za nulové hypotézy pro $n, m \rightarrow \infty$ platí $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} K_{n,m} \xrightarrow{d} Z$, kde Z je náhodná veličina s distribuční funkcí $G(z) = (1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 z^2}) I[z > 0]$.

```
xmean=mean(IQchlapci)
ymean=mean(IQdivky)
nx=length(IQchlapci)
ny=length(IQdivky)
S2=1/(nx+ny-2)*((nx-1)*var(IQchlapci)+(ny-1)*var(IQdivky))
(T.stat=(xmean-ymean)/(sqrt(S2*(1/nx+1/ny))))

# kriticka hodnota
qt(1-alpha/2,df=nx+ny-2)
#p-hodnota
2 * pt(-abs(T.stat), df = nx+ny-2)
```

10. Který z předpokladů testu lze do určité míry ignorovat a test zůstane v platnosti alespoň asymptoticky? Nesplnění kterého předpokladu může naopak vést k nedodržení předepsané hladiny testu?

11. Nyní si vyzkoušíme jinou verzi t -testu, která předpoklad shody rozptylů neuvažuje. Jde o tzv. *Welchův test*.

(a) Provedeme test:

```
t.test(IQ ~ FPohlavi)
```

```
#nebo
```

```
t.test(IQchlapci, IQdivky)
```

Jaký je náš závěr? Jaké rozdělení má asymptoticky uvedená testová statistika? A na základě jakého rozdělení je spočtená p -hodnota? Co stačí předpokládat pro rozdělení IQ dívek a chlapců?

Jak vidíme, tato verze t -testu je v R nastavena defaultně. Jelikož předem většinou nevíme, zda je možné předpokládat shodu rozptylů zkoumaných dvou výběrů, je lepší rovnou použít tuto obecnější verzi testu. V případě, že rozptyly ve skutečnosti shodné jsou, má tento obecnější test jen zanedbatelně nižší sílu ve srovnání s testem odvozeným pro výběry se shodným rozptylem, viz simulace ve 13.

(b) Opět provedeme manuální výpočet testové statistiky

```
(T.W=(ymean-xmean)/(sqrt(var(IQdivky)/nx+var(IQchlapci)/ny)))
```

12. V rámci procvičení zkuste otestovat domněnku, zda je rozdíl IQ dívek a chlapců vyšší než 5.

13. Na základě následujících simulací porovnáme sílu t -testu se shodou rozptylů a Welchova testu pro situaci, kdy shoda rozptylů platí

```
opak=1000
n1=100
n2=150
p.s=numeric(opak)
p.w=numeric(opak)
for(i in 1:opak){
  x=rnorm(n1,0.2,sd=1)
  y=rnorm(n2,0,sd=1)
  p.s[i]=t.test(x,y,var.equal=TRUE)$p.val
```

```

    p.w[i]=t.test(x,y)$p.val
  }
mean(p.s<=0.05)
mean(p.w<=0.05)

```

14. V předchozích simulacích proved'te následující změnu: simulujte x za nulové hypotézy, tj. nastavte střední hodnotu na 0, ale změňte směrodatnou odchylku na 3. Tím se podíváme na to, jaká je hladina testů za nulové hypotézy v případě neshody rozptylů. Měli bychom vidět, že varianta t -testu, která shodu předpokládá, nedodržíme předepsanou hladinu testu.
15. Celou situaci si můžeme i graficky znázornit pomocí první simulace ze souboru `cviceni11-obrazky.R`. Současné nastavení nám ukazuje porovnání síly při shodě rozptylů. Změňte nastavení tak, abyste viděli, jak situace vypadá, pokud (a) zvýšíme směrodatnou odchylku x , (b) zvýšíme směrodatnou odchylku y .

DVOUVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST (MANNŮV-WHITNEYŮV TEST)

14. Opět se vrátíme k původní otázce, a to, zda se liší IQ u chlapců a dívek. Nyní použijeme dvouvýběrový Wilcoxonův test.
- (a) Jaký model předpokládáme pro data?
- (b) Jak zní nulová a alternativní hypotéza?
- (c) Testová statistika má tvar

$$W_{n,m} = \sum_{i=1}^n R_i,$$

kde R_i je pořadí X_i ve sdruženém výběru $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$.

Pro jaké její hodnoty budeme zamítat?

- (d) Provedeme asymptotickou verzi testu (bez korekce pro spojitost):

```
wilcox.test(IQ~FPohlavi, correct = FALSE)
```

Jaký je náš závěr?

- (e) Přesnou verzi testu bychom zavolali pomocí nastavení `exact=TRUE` v předchozí funkci. Zkuste.

15. Zkusíme manuální výpočet jednotlivých položek testu. Spočítáme testovou statistiku podle vzorce z přednášky:

```

r=rank(IQ)
(W1=sum(r[FPohlavi=="divka"]))
(W2=sum(r[FPohlavi=="chlapec"]))

```

Dostali jsme stejný výsledek jako funkce `wilcox.test`?

P-hodnotu Wilcoxonova testu bychom dostali pomocí aproximace normálním rozdělením, viz Samostatná práce (iii).

16. Vypočteme Mannovu-Whitneyovu statistiku, která má tvar

$$W_{n,m}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I[X_i < Y_j]$$

a v případě, kdy máme v datech shody, tak

$$W_{n,m}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (I[X_i < Y_j] + \frac{1}{2} I[X_i = Y_j]) .$$

Výpočet provedeme buď pomocí for cyklu (který je ale obecně v R mnohem pomalejší než maticové výpočty)

```
U1=0;U2=0
for(i in 1:nx)
  for(j in 1:ny){
    U1=U1+I(IQchlapci[i]<IQdivky[j])+1/2*I(IQchlapci[i]==IQdivky[j])
    U2=U2+I(IQchlapci[i]>IQdivky[j])+1/2*I(IQchlapci[i]==IQdivky[j])
  }
U1; U2
```

nebo pomocí matic:

```
x1 <- matrix(rep(IQchlapci, ny), ncol = ny)           # ve sloupcich IQchlapci
x2 <- matrix(rep(IQdivky, nx), ncol = ny, byrow = TRUE) # v radcich IQdivky
head(x1)
head(x2)
#
(U1 <- sum(x1 < x2) + 0.5 * sum(x1 == x2))
(U2 <- sum(x1 > x2) + 0.5 * sum(x1 == x2))
```

Vidíme teď nějakou shodu s výstupem funkce `wilcox.test`?

17. Mezi Wilcoxonovou statistikou a M-W statistikou je jednoznačný vztah (viz přednáška):

```
(nx * ny + 0.5 * nx * (nx + 1) - W1)      # U1
(nx * ny + 0.5 * ny * (ny + 1) - W2)      # U2
```

18. V následujících simulacích si porovnáme sílu dnes uvažovaných testů pro několik vybraných situací. Využijeme k tomu funkci `simuluj`, kterou jsme si načetli spolu s obrázkem K-S testu. Do této funkce zadáme rozsahy uvažovaných výběrů n a m a který z následujících scénářů chceme:

- normal-posun: $X_i \sim N(0, 1)$, $Y_i \sim N(1, 1)$,
- normal-hetero $X_i \sim N(0, 1)$, $Y_i \sim N(0, 3)$,
- normal-exp: $X_i \sim N(0, 1)$ a $Y_i = W_i - 1$, kde $W_i \sim \text{Exp}(1)$,
- normal-exp2: $X_i \sim N(0, 1)$ a $Y_i = W_i - \log 2$, kde $W_i \sim \text{Exp}(1)$.

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-posun")
simuluj(n=50, m=80, scenar="normal-posun")

simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-hetero")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-hetero")
```

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-exp")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-exp")
```

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-exp2")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-exp2")
```

Spusťte si jednotlivé příkazy postupně a zamyslete se, co testujeme a zda generujeme data za nulové hypotézy nebo za alternativy příslušného testu. Co testujeme u Wilcoxonova testu?

SAMOSTATNÁ PRÁCE

- (i) Zjistěte, zda mají dívky v osmé třídě lepší známky než chlapci. Vyberte test vhodný pro naše data a interpretujte výsledek.
- (ii) Zjistěte, zda je rozdíl ve známkách z předchozího bodu větší než 0.5.
- (iii) V předchozí práci jsme zjistili, že funkce `wilcox.test` počítá Mannovu-Whitneyovu testovou statistiku a nikoliv Wilcoxonovu. Z přednášky ale víme, že Mannův-Whitneyův test je ekvivalentní Wilcoxonově testu. Tudíž bychom měli dostat stejnou p-hodnotu. Spočítáme ji pomocí aproximace normálním rozdělením, kde musíme navíc přidat i korekci pro shody v datech:

```
nx=length(IQchlapci)
ny=length(IQdivky)
EW=nx*(nx+ny+1)/2
# varW.bez=nx*ny*(nx+ny+1)/12

# vypocet korekce
t=table(r)
kor=sum(t^3-t)/((nx+ny)*(nx+ny-1))
varW.kor=nx*ny*(nx+ny+1-kor)/12

U=(W1-EW)/sqrt(varW.kor)

2*pnorm(-abs(U))
# porovname:
wilcox.test(IQ~FPohlavi,correct=FALSE)$p.val
```

Dostali jsme nyní stejnou p-hodnotu jako funkce `wilcox.test`?

- (iv) Předpokládejme, že máme dva nezávislé výběry X_1, \dots, X_n a Y_1, \dots, Y_n (oba výběry mají stejný počet pozorování), kde $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Chceme testovat shodu středních hodnot, tj. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Co když namísto Welchova t -testu použijeme párový test? Tj. spočteme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$ a pak test založíme na testové statistice

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{Z}_n}{S_n^{(Z)}}, \quad \text{kde} \quad S_n^{2(Z)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}_n)^2$$

a nulovou hypotézu zamítneme, pokud $|T_n| \geq t_{n-1}(1 - \alpha/2)$.

- (v) Rozdělení testové statistiky Welchova testu je aproximováno pomocí t-rozdělení s ν stupni volnosti, kde ν se určí na základě výběrových rozptylů a počtů pozorování v jednotlivých výběrech. Ověřte, zda R využívá stejný vzorec jako je uvedený ve [skriptech](#) v kapitole 6.2.
- (vi) Zajímá nás, zda v osmé třídě dochází k zlepšení prospěchu oproti sedmé třídě. Jaký test je vhodný pro tuto situaci? Proveďte jej a interpretujte závěr.