

# MNOHOROZMĚRNÉ NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

## 1. CVIČENÍ

**DEFINICE:** Necht'  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^\top$ , kde  $Z_i \sim \mathbf{N}(0, 1)$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Necht'  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{A}_{n \times r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  je matice. Pak řekneme, že  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$  má  $n$ -**rozměrné normální rozdělení**  $\mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$ .

**DISKUZE K DEFINICI:**

- Necht'  $\boldsymbol{\Sigma}_{n \times n}$  je symetrická pozitivně semidefinitní matice.
  - Pak existuje matice  $\mathbf{A}_{n \times r}$  taková, že  $\mathbf{AA}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ .
  - Je-li hodnota  $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r < n$ , pak existuje matice  $\mathbf{A}_{n \times r}$  taková, že  $h(\mathbf{A}) = r$  a  $\mathbf{AA}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ .
- Rozdělení  $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$  z definice nezávisí na konkrétní volbě  $\mathbf{A}$ , závisí pouze na  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$ .

**VLASTNOSTI:** Ukažte, že platí:

1. Má-li  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , pak  $\mathbf{EX} = \boldsymbol{\mu}$ ,  $\text{Var } \mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}$ .
2. Je-li  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^k$ , pak  $\mathbf{BX} + \boldsymbol{\mu}_2$  má rozdělení  $\mathbf{N}_k(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^T)$ .  
*Poznámka: Dokonce platí, že  $\mathbf{X}$  má mnohorozměrné normální rozdělení  $\Leftrightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{X}$  má normální rozdělení pro každé  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .*

3. Existence hustoty:

- Je-li  $\boldsymbol{\Sigma}$  regulární, pak existuje hustota vzhledem k Lebesgueově míře a je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Je-li  $\boldsymbol{\Sigma}$  singulární, pak hustota vzhledem k Lebesgueově míře neexistuje.

4. Necht'  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  a označme  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ , kde  $\mathbf{X}_1$  tvoří prvních  $k$  složek  $\mathbf{X}$ .

- (i) Marginální rozdělení  $\mathbf{X}_1$  i  $\mathbf{X}_2$  je normální, speciálně  $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$  a  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$ .
- (ii) Je-li  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ , pak jsou  $\mathbf{X}_1$  a  $\mathbf{X}_2$  nezávislé.  
*Tj. má-li náhodný vektor mnohorozměrné normální rozdělení a jeho složky jsou nekorelované, pak jsou i nezávislé.*

*Následující příklad ukazuje, že pro platnost implikace „nekorelované  $\Rightarrow$  nezávislé“ je nutné, aby vektor  $(X, Y)^\top$  měl sdružené normální rozdělení. Samotná normalita složek nestačí.*

5. Necht'  $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$  a necht'  $1/2 = \mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Z = -1)$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Definujme  $Y = Z \cdot X$ . Ukažte, že

- (a)  $X$  i  $Y$  mají rozdělení  $\mathbf{N}(0, 1)$ ,
- (b) veličiny  $X$  a  $Y$  jsou nekorelované, ale nejsou nezávislé,

(c) sdružené rozdělení  $X$  a  $Y$  není normální.

6. Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\boldsymbol{\Sigma}$  je regulární. Pak

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_n^2.$$

### DOPLŇUJÍCÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

D1. Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Pak náhodná veličina  $\|\mathbf{X}\|^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i^2$  má stejné rozdělení jako  $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2$ , kde  $Y_i$  jsou iid veličiny s  $\mathbf{N}(0, 1)$  rozdělením a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Speciálně pak platí, že

- $E\|\mathbf{X}\|^2 = \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\text{tr}(\cdot)$  značí stopu matice (tj. součet čísel na diagonále),
- pokud má  $\boldsymbol{\Sigma}$  vlastní čísla pouze 0 nebo 1, pak má veličina  $\|\mathbf{X}\|^2$  rozdělení  $\chi^2$  se stupni volnosti rovnými  $h(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})$ .

*Návod: Využijte spektrální rozklad  $\boldsymbol{\Sigma}$  a volbu  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ .*

D2. Nalezněte asymptotickou aproximaci rozdělení  $\chi_n^2$  pro velké  $n$  pomocí normálního rozdělení.

*Návod: Využijte definici  $\chi_n^2$  a CLV.*

D3. Pro  $n = 2$  ukažte, jak lze generovat náhodný vektor z rozdělení  $\mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  pro nějaké zadané

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}^2$  a  $\boldsymbol{\Sigma}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  pozitivně semidefinitní, umíme-li generovat náhodné veličiny z  $\mathbf{N}(0, 1)$ .

*Návod: Předpokládáte tedy, že umíte generovat  $Z_1, Z_2 \sim \mathbf{N}(0, 1)$  nezávislé a chcete najít předpis pro  $X_1$  a  $X_2$  pro zadané  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Uvažujte nejprve situaci  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  a  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , kterou pak již snadno převeďte na obecný případ.*

### OPAKOVÁNÍ (UŽITEČNÁ TVRZENÍ)

**SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD MATICE.** Nechť  $\boldsymbol{\Sigma}_{n \times n}$  je symetrická reálná matice. Pak existuje  $\mathbf{Q}$  ortho-normální a  $\boldsymbol{\Lambda}$  diagonální matice takové, že

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T,$$

kde  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  má na diagonále vlastní čísla  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Sloupce matice  $\mathbf{Q}$  jsou vlastní vektory  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

**$\chi^2$  ROZDĚLENÍ.** Nechť  $Z_1, \dots, Z_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $\mathbf{N}(0, 1)$ . Pak  $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$  má  $\chi^2$  rozdělení s  $n$  stupni volnosti.

**VÝZNAM NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ: MNOHOROZMĚRNÁ CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA.** Nechť  $\{\mathbf{X}_n\}$  je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených (píšeme iid)  $p$ -rozměrných náhodných vektorů z rozdělení se střední hodnotou  $\boldsymbol{\mu}$  a konečnou rozptylovou maticí  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Pak platí

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$