

## ASYMPTOTICKÉ ROZDĚLENÍ

### 3. CVIČENÍ

1. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení  $\text{Exp}(\lambda)$  s hustotou  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}[x \geq 0]$ .

(a) Uvažujte  $T_n = (\bar{X}_n)^{-1}$ . Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti  $T_n$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

*Poznámka:  $T_n$  je maximálně věrohodný odhad  $\lambda$ , což snadno samostatně ověříte.*

(b) Nalezněte asymptotické rozdělení  $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$ .

(c) Uvažujte  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[X_i > 1]$ . Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti  $U_n$  a nalezněte asymptotické rozdělení  $U_n$ .

(d) Definujme  $V_n = -\log(U_n)$ . Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení  $V_n$ .

*K výpočtu momentů exponenciálního rozdělení využijte gamma funkci:  $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .*

2. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení s hustotou  $f(x) = \frac{p}{x^{1+p}} \mathbb{I}[x \geq 1]$ , kde  $p > 0$ .

Uvažujte

$$T_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}.$$

(a) Ukažte, že  $T_n$  je maximálně věrohodný odhad parametru  $p$ .

(b) Ukažte, že pro  $n \rightarrow \infty$  platí  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$ .

(c) Najděte asymptotické rozdělení náhodné veličiny  $\sqrt{n}(T_n - p)$ .

(d) Uvažujte odhad  $U_n = \bar{X}_n / (\bar{X}_n - 1)$ . Ukažte, že se jedná o momentový odhad  $p$  a vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti  $U_n$ .

(e) Odvoďte asymptotické rozdělení  $U_n$ .

(f) Pro  $p = 3$  odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny  $Z_n = (\bar{X}_n)^3$ . Porovnejte rozptyl  $Z_n$  s jejím asymptotickým rozptylem.

3. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda_X > 0$ , a necht'  $Y_1, \dots, Y_n$  jsou od nich nezávislé, a tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda_Y > 0$ . Odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny  $T_n = \bar{X}_n / \bar{Y}_n$ .

4.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tvoří náhodný výběr z binomického rozdělení  $\text{Bi}(2, p)$ , kde  $p \in (0, 1)$ . Necht'  $Y_i = \mathbb{I}[X_i = 0]$ .

(a) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti  $U_n = \sqrt{\bar{X}_n + \bar{Y}_n} - 1$ .

(b) Nalezněte asymptotické rozdělení  $U_n$ .

(c) Uvažujte náhodné vektory tvaru  $(\bar{X}_n/2, U_n)^\top$ . Vyšetřete jejich konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení.

## OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

### DELTA METODA

- *Jednorozměrná verze:* Necht'  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje  $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, \sigma^2)$  pro nějaké  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma^2 \geq 0$  a necht'  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu  $\mu$ , pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2).$$

- *Obecná verze:* Necht'  $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje  $\sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  pro nějaké  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$  a  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  pozitivně semi-definitní, a necht'  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)^\top: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  má spojitě parciální derivace na nějakém okolí bodu  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ . Označme

$$\mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\sqrt{n}(\mathbf{g}(\mathbf{T}_n) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_m(\mathbf{0}, \mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbb{D}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\mu}))^\top).$$

**CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA (CLV):** Necht'  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$  a konečnou rozptylovou maticí  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Pak platí

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$